Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

4. Übungsserie

In den folgenden Aufgaben sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

4.1 Es sei T eine endliche Stoppzeit bezüglich der rechtsstetigen Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$. Dann ist das in Aufgabe 4.3 b) definierte Mengensystem $\mathcal{A}_T$ die kleinste σ-Algebra bezüglich der alle càdlàg Prozesse ausgewertet bei T messbar sind, d. h.

$$\mathcal{A}_T = \sigma(X_T \mid (X_t)_{t\geq 0} \text{ ist ein adaptierter càdlàg Prozess}).$$

4.2 Es sei T eine $(\mathcal{A}_t)$-Stoppzeit, und $(\theta_t)_{t\geq 0}$ bezeichne die Familie der Shift-Operatoren. Man zeige, dass $s + T \circ \theta_s$ eine $(\mathcal{A}_t)$-Stoppzeit ist.

4.3 (4 Punkte) Es seien S und T zwei $(\mathcal{A}_t)$-Stoppzeiten. Man zeige:

a) $S \wedge T$ und $S \vee T$ sind $(\mathcal{A}_t)$-Stoppzeiten.

b) Das Mengensystem

$$\mathcal{A}_T := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{A}_t \quad \text{für alle } t \geq 0\}$$

ist eine σ-Algebra, und T ist $\mathcal{A}_T$-messbar.

c) Gilt $S \leq T$, so folgt $\mathcal{A}_S \subseteq \mathcal{A}_T$.

d) Es gilt $\mathcal{A}_{S\wedge T} = \mathcal{A}_S \cap \mathcal{A}_T$, und jedes der Ereignisse $\{S = T\}$, $\{S \leq T\}$, $\{S < T\}$ gehört zur σ-Algebra $\mathcal{A}_S \cap \mathcal{A}_T$.

4.4 (4 Punkte) Die Filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ sei zusätzlich rechtsstetig. Man zeige:

a) Die Zufallsgröße $T : \Omega \to [0, \infty]$ ist eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ genau dann wenn $\{T < t\} \in \mathcal{A}_t$ für alle $t \geq 0$ gilt.

b) Ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Stoppzeiten, so ist $T := \lim_{n\uparrow\infty} T_n$ ebenfalls eine Stoppzeit, und es gilt $\bigcap_n \mathcal{A}_{T_n} = \mathcal{A}_T$.

4.5 (3 Punkte) Man beweise die folgenden Aussagen:

a) Es sei T eine $(\mathcal{A}_t)$-Stoppzeit und $A \in \mathcal{A}$. Die Zufallsgröße T_A mit

$$T_A(\omega) := \begin{cases} T(\omega) & \text{falls } \omega \in A \\ \infty & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

ist genau dann eine $(\mathcal{A}_t)$-Stoppzeit falls $A \in \mathcal{A}_T$.

b) Ist φ eine Borel-Funktion auf $\mathbb{R}_+$ mit $\varphi(x) \geq x$, so ist mit T auch $\varphi(T)$ eine $(\mathcal{A}_t)$-Stoppzeit.

c) Jede Stoppzeit T ist der Limes einer fallenden Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei jede Stoppzeit T_n nur endlich viele Werte annimmt.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 5.12.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.