



Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 1. Abgabetermin: 22.4.05

Aufgabe 1 (3 Punkte):

- (a) Seien a, b Elemente einer Gruppe G . Man zeige, dass die Gleichung $ax = b$ in G eine eindeutige Lösung hat.
- (b) Seien w, x, y, z Elemente einer Gruppe G mit neutralem Element e . Man löse $w^{-1}xyz^{-1}w = e$ nach y auf.
- (c) Angenommen in einer Gruppe G gilt $xyz = e$, folgen dann auch die Gleichungen $yzx = e$, $zxy = e$, $xzy = e$, $yxz = e$ und $zyx = e$?

Aufgabe 2 (4+2* Punkte):

- (a) Man gebe jeweils eine Gruppentafel für eine Gruppe mit 2, 3 bzw. 5 Elementen an.
- (b) Man gebe mindestens zwei verschiedene Gruppentafeln für eine Gruppe mit 4 bzw. 6 Elementen an.
- (c*) Bestimme die Anzahl der Gruppen mit 1, 2, ..., 6 Elementen bis auf Isomorphie.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

- (a) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann isomorph sind, wenn n und m teilerfremd sind.
- (b) Man zeige, dass das direkte Produkt zweier zyklischen Gruppen mit teilerfremden Ordnungen wieder zyklisch ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

- (a) Sei k ein Körper. Man zeige, dass die Menge $\text{Gl}_n(k)$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in k versehen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.
- (a) Bestimme die Ordnung der Gruppe $\text{Gl}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für Primzahlen p .

Literatur zur Vorlesung:

Vieweg Mathematik Lexikon, Vieweg Verlag; M. Artin: Algebra, Birkhäuser Verlag; S. Bosch: Algebra, Springer Verlag; E. Kunz: Algebra, Vieweg Verlag; S. Lang: Algebra, Springer Verlag; G. Wüstholtz: Algebra, Vieweg Verlag.