HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. U. KÜHN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 1. Abgabetermin: 22.4.05

Aufgabe 1 (3 Punkte):

(a) Seien a, b Elemente einer Gruppe G. Man zeige, dass die Gleichung $ax = b$ in G eine eindeutige Lösung hat.

(b) Seien w, x, $y\, z$ Elemente einer Gruppe G mit neutralen Element e. Man löse $w^{-1}xyz^{-1}w = e$ nach y auf.

(c) Angenommen in einer Gruppe G gilt $xyz = e$, folgen dann auch die Gleichungen $yzx = e$, $zxy = e$, $xzy = e$, $yxz = e$ und $zyx = e$?

Aufgabe 2 (4+2* Punkte):

(a) Man gebe jeweils eine Gruppentafel für eine Gruppe mit 2, 3 bzw. 5 Elementen an.

(b) Man gebe mindestens zwei verschiedene Gruppentafeln für eine Gruppe mit 4 bzw. 6 Elementen an.

(c*) Bestimme die Anzahl der Gruppen mit 1, 2, ..., 6 Elementen bis auf Isomorphie.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Seien m, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann isomorph sind, wenn n und m teilerfremd sind.

(b) Man zeige, dass das direkte Produkt zweier zyklischen Gruppen mit teilerfremden Ordnungen wieder zyklisch ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Sei k ein Körper. Man zeige, dass die Menge $\mathrm{Gl}_n(k)$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in k versehen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

(a) Bestimme die Ordnung der Gruppe $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für Primzahlen p.

Literatur zur Vorlesung:

Vieweg Mathematik Lexikon, Vieweg Verlag; M. Artin: Algebra, Birkhäuser Verlag; S. Bosch: Algebra, Springer Verlag; E. Kunz: Algebra, Vieweg Verlag; S. Lang: Algebra, Springer Verlag; G. Wüstholz: Algebra, Vieweg Verlag.

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: kuehn@mathematik.hu-berlin.de
grabitz@mathematik.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html