HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. U. KÜHN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 10. Abgabetermin: 24.6.05

Aufgabe 1 (6 Punkte): Bestimme den Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ und über $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Sei K der Körper $\mathbb{F}_3(t)$. Man zeige, dass das Polynom $f(X) = X^3 - t \in K[X]$ irreduzibel ist und bestimme die Nullstellen von $f(X)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
a) Bestimme ein primitives Element α für den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$.
b) Gebe eine Darstellung von $\sqrt[3]{2}$ und eine von $\sqrt{2}$ als Element von $\mathbb{Q}(\alpha)$ an.

Aufgabe 4 (4^* Punkte):
Man beweise, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich viele Elemente besitzt.

Aufgabe 5 (6^* Punkte):
Man beweise: Für jede Primzahl p und jede ganze Zahl $n \geq 1$ gibt es einen Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^n$ Elementen. Er ist gegeben durch den Zerfällungskörper des seperablen Polynoms $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Jeder endliche Körper ist isomorph zu einem dieser Körper $\mathbb{F}_q$.

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: kuehn@mathematik.hu-berlin.de
grabitz@mathematik.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html