HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Dr. U. Kühn

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 11. Abgabetermin: 1.7.05

Aufgabe 1 (4+4* Punkte): a*) Man zeige: Das Polynom $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ist irreduzibel und hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{\frac{2\pi_i}{9}} + e^{-\frac{2\pi_i}{9}} = 2\cos(2\pi/9) \\ \alpha_2 &= -\cos(2\pi/9) + \cos(8\pi/9) - \cos(4\pi/9) \\ \alpha_3 &= -\cos(2\pi/9) - \cos(8\pi/9) + \cos(4\pi/9) \end{aligned}$$

b*) Man beweise:

$$\alpha_2 = -\alpha_1^2 - \alpha_1 + 2 \text{ und } \alpha_2^2 = \alpha_1 + 2,$$
$$\alpha_3 = \alpha_1^2 - 2 \text{ und } \alpha_3^2 = -\alpha_1^2 + \alpha_1 + 4.$$

c) Man folgere aus b), dass $K = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ galoissch ist.
d) Man bestimme eine Darstellung von $G(K|\mathbb{Q})$ bezüglich der Basis $1, \alpha_1, \alpha_1^2$ und zeige, dass die Galoisgruppe $G(K|\mathbb{Q})$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 2 (6+2* Punkte): Sei K ein Körper und $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[X]$ ein normiertes Polynom mit Wurzeln $x_1, \ldots, x_n \in \overline{K}$. Dann nennt man $\Delta(f) := \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$ die *Diskriminante* von f.
a) Was entscheidet die Diskriminante?
b*) Man zeige, dass $\Delta(f)$ sich als Polynom in den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ schreiben läßt, insbesondere also auch $\Delta(f) \in K$ gilt.
c) Man bestimme $\Delta(f)$ als Polynom in den Koeffizienten in den Fällen $\deg(f) = 2$ und $\deg(f) = 3$.
d) Sei L der Zerfällungskörper von f über K. Dann ist $\sqrt{\Delta(f)} \in L$ und $Z = K[\sqrt{\Delta(f)}]$ ein Zwischenkörper von $L|K$ mit $[Z : K] \leq 2$.

Aufgabe 3 (4* Punkte):
Man zeige, dass das Polynom $f(X) = X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist und nur eine reelle Nullstelle besitzt. Welche Galoisgruppe besitzt der Zerfällungskörper von f?

Aufgabe 4 (4* Punkte): Man zeige der Körper $K = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$ ist galoisch und bestimme die Galosigruppe $G(K|\mathbb{Q})$.

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: kuehn@mathematik.hu-berlin.de
grabitz@mathematik.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html