



Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 2. Abgabetermin: 29.4.05

Aufgabe 1 (6 Punkte):

- (a) Bestimme das Zentrum der Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$.
- (b) Bestimme das Zentrum von S_4 .
- (c) Bestimme den Zentralisator des Zykels $\sigma = (234)$ in S_5 .

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Es seien N, H Gruppen, $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ein Homomorphismus, $G = N \times H$ das mengentheoretische Produkt von N und H . Zeige, dass die Verknüpfung $(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\rho(h_1)(n_2), h_1h_2)$ eine Gruppenoperation auf G definiert. Man nennt die so erhaltene Gruppe G das *semi-direkte* Produkt $N \rtimes H$ von N und H bezüglich ρ .

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Man zeige, dass folgende Beschreibungen der Diedergruppe D_m äquivalent sind:

- (a) D_m ist die Symmetriegruppe eines regelmässigen m -Eckes.
- (b) D_m ist eine endliche Gruppe der Ordnung $2m$, die von zwei Elementen der Ordnung 2 erzeugt wird.
- (c) D_m ist semi-direktes Produkt einer zyklischen Gruppe C_m der Ordnung m mit einer Gruppe C_2 der Ordnung 2, wobei $\rho : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_m)$ gegeben ist durch $\rho(g) = g^{-1}$. (Aufgabe geändert am 4.5.2005 !!)

Aufgabe 4 (4 Punkte):

- (a) Beschreibe die Zerlegung in Bahnen von $X = \mathbb{R}^2$ bezüglich der Aktion der orthogonalen Gruppe $O(2)$. Bestimme die zugehörigen Stabilisatoren.
- (b) Beschreibe die Zerlegung in Bahnen von $X = \mathbb{R}^2$ bezüglich der Aktion der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ gegeben durch $(t, (x, y)) \mapsto (tx, y/t)$. Bestimme die zugehörigen Stabilisatoren.

Aufgabe 5 (2* Punkte):

Sei G eine Gruppe, H ein Normalteiler in G und K ein Normalteiler in H . Ist dann auch K ein Normalteiler in G ?