HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. U. KÜHN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 3. Abgabetermin: 6.5.05

Aufgabe 1 (4 Punkte): Zeige jede Gruppe der Ordnung 15 ist zyklisch. Tip: Verwende den Satz von Sylow und bestimme alle Normalteiler.

Aufgabe 2 (2 Punkte): Man zeige: Sind G, H und K endliche abelsche Gruppen und gilt $G \times H \cong G \times K$, so folgt $H \cong K$.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Seien U und V Untergruppen einer endlichen Gruppe G und $UV := \{uv \mid u \in U,\, v \in V\}$. Man zeige

(a) $|UV| = \frac{|U|\cdot|V|}{|U\cap V|}$.

(b) Ist V ein Normalteiler von von G, so ist UV eine Untergruppe von G und $[UV : V]$ ist ein Teiler von $|U|$ und $[G : V]$. Sind $|U|$ und $[G : V]$ teilerfremd, so gilt $U \subset V$.

(c) Ist V ein Normalteiler von G und sind $|U|$ und $[G : V]$ teilerfremd, so gilt: Ist G Normalteiler in einer Gruppe H, dann ist auch V ein Normalteiler in H.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Sei G eine Gruppe. Für $a,\, b \in G$ heisst $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ der *Kommutator* von a, b. Die von allen Kommutatoren $[a, b]$ mit $a,\, b \in G$ erzeugte Untergruppe wird mit $[G, G]$ bezeichnet und heisst die *Kommutatorgruppe* von G.

(a) Man zeige: $[G, G]$ ist ein Normalteiler und $G/[G, G]$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Sei $\pi : G \to G/[G, G]$ der kanonische Epimorphismus. Ist $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus in eine abelsche Gruppe H, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $h : G/[G, G] \to H$.

Aufgabe 5 (4^* Punkte):
Zeige: Die projektive spezielle lineare Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ist für jede Primzahl $p > 3$ eine einfache Gruppe.

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: `kuehn@mathematik.hu-berlin.de`
`grabitz@mathematik.hu-berlin.de` `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html`