HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Dr. U. Kühn

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 5. Abgabetermin: 20.5.05

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $\varphi : R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen.

(a) Man zeige, dass sein Bild $\mathrm{im}(\varphi) = \varphi(R)$ ein Unterring von R' ist.

(b) Man zeige, dass sein Kern $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ ein Ideal in R ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

(a) Man zeige, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.

(b) Man zeige, dass das Ideal $(x^2 + x + 1) \subset \mathbb{Z}[x]$ ein Primideal ist.

(c) Man zeige, dass für alle Primzahlen p das Ideal $(p) \subset \mathbb{Z}[x]$ ein Primideal ist.

(d) Man zeige, dass das Ideal $(5, x^2 + x + 1) \subset \mathbb{Z}[x]$ ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei R die Menge der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass die punktweise Addition und Multiplikation R zu einem Ring (mit Eins) macht. Ist R kommutativ? Hat R Nullteiler? Beschreibe die maximalen Ideale.

Aufgabe 4 (4^* Punkte): Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent* falls $x^n = 0$ für ein $n \geq 1$. Zeige, dass die Menge N der nilpotenten Elemente von R ein Ideal bilden und dass der Faktorring R/N außer 0 keine nilpotenten Elemente hat. Überprüfe, dass N im Durchschnitt aller Primideale von R enthalten ist.

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: kuehn@mathematik.hu-berlin.de
grabitz@mathematik.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html