HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. U. KÜHN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 7. Abgabetermin: 3.6.05

Aufgabe 1 (4 Punkte): Man zeige: Ein Integritätsbereich R ist faktoriell genau dann wenn jedes $x \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ eine endliche Zerlegung in irreduzible Elemente von R besitzt und zu je zwei x, $y \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ ein größter gemeinsamer Teiler $\mathrm{ggT}(x, y)$ existiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Sei R ein Integritätsbereich und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Man zeige: $\mathfrak{a}$ ist ein freier R-Modul genau dann wenn $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in R$.

(b) Finde einen Unterring $R \subset \mathbb{C}$ und $\mathfrak{a} \subset R$, sodass $\mathfrak{a}$ kein freier R-Modul ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Bestimme die Elemtarteiler folgender ganzzahliger Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte): Bestimme die abelschen Gruppen die durch folgende Matrizen präsentiert werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (4^* Punkte): Ein R-Modul heißt *einfach*, wenn er nicht der Nullmodul ist und keine echten Untermoduln enthält.

(a) Man beweise, dass ein einfacher Modul zu $R/\mathfrak{m}$ isomorph ist, wobei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist.

(b) Man beweise das Schursche Lemma: Sei $\varphi : V \to V$ ein Homomorphismus von einfachen Moduln> Dann ist entweder φ gleich Null oder φ ist ein Isomorphismus.

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: kuehn@mathematik.hu-berlin.de
grabitz@mathematik.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html