HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. U. KÜHN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 8. Abgabetermin: 10.6.05

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Berechnen Sie die Elementarteiler der Matrix $\begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & X-3 \end{pmatrix}$ mit Einträgen in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Zeigen Sie:
(a) In $\mathbb{F}_2[X]$ ist X^2+X+1 das einzige Primpolynom vom Grade 2.
(b) Das Polynom $f(X) = X^4+3X^3+X^2-2X+1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$, also auch in $\mathbb{Q}[X]$.
(c) $X^m+1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist für für jedes $m = 2^n$ irreduzibel.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Sei R ein faktorieller Ring, und es gebe ein Primelement q von R, sodaß keine Einheit $e \neq 1$ von R die Kongruenz $e \equiv 1\ (mod\ q)$ erfüllt. Man zeige, daß dann R unendlich viele prime Hauptideale (p) besitzt. Insbesondere gilt dies für $R = \mathbb{Z}$ oder $R = K[X]$ mit einem Körper K. (Hinweis: Erinnern Sie sich an Euklids Beweis für die Existenz von unendlich vielen Primzahlen.)

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Zeige: Sind $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene ganze Zahlen, so ist das Polynom $f(X) = (X-a_1)^2(X-a_2)^2 \ldots (X-a_n)^2+1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. (Hinweis: Erinnern Sie sich an die Lagrangeinterpolation.)

Aufgabe 5 (4* Punkte):
Beweise, daß $A = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe ist, deren Torsionsuntergruppe A_t kein direkter Summand von A ist, wobei $\mathcal{P}$ die Menge aller natürlichen Primzahlen ist. Alternativ: Finden Sie irgend eine andere abelsche Gruppe deren Torsionsanteil kein direkter Summand ist (mit Beweis).

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: kuehn@mathematik.hu-berlin.de
grabitz@mathematik.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html