HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. U. KÜHN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra 1

Serie 9. Abgabetermin: 17.6.05

Aufgabe 1 (4 Punkte):
a) Welchen Grad besitzt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-23})$ über $\mathbb{Q}$?
b) Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{-23}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte):
Beweise, dass $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als $\mathbb{Q}$-Vektorräume, aber nicht als Körper isomorph sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Für eine quadratfreie Zahl $d \in \mathbb{Z}$ sei R_d der Ring der ganzen algebraischen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeigen Sie:
a) Ist $d \equiv 2 \pmod 4$ oder $d \equiv 3 \pmod 4$, so ist $R_d = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{d}$.
b) Ist $d \equiv 1 \pmod 4$, so ist $R_d = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \frac{1+\sqrt{d}}{2}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Welche der folgenden algebraischen Zahlen ist ganz

$$\sqrt{3 - \sqrt{5}} + 3^{2/9}, \quad \frac{1}{\sqrt{23}}, \quad \frac{23 - \sqrt[5]{11}}{9 + 4\sqrt{5}}, \quad \cos(\frac{5}{7}\pi)\,?$$

Aufgabe 5 (2 Punkte):
Sei R ein Integritätsring und $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ein irreduzibles Polynom sodass a_0 eine Einheit in R ist. Man zeige: In der Ringerweiterung $S = R[X]/(f(X))$ ist die Restklasse x von X eine Einheit.

Aufgabe 6 (4^* Punkte):
Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Man zeige: Zwei Elemente α, $\beta \in L$ sind genau dann algebraisch über K, wenn $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ algebraisch über K sind.

phone: 030/2093-5412 fax: 030/2093-5853 e-mail: kuehn@mathematik.hu-berlin.de
grabitz@mathematik.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kuehn/uebungen.html