Übungsblatt 10

Analysis II* SoSe 2016

Abgabe: 28.6.2016

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Wir betrachten die Menge $A \subset \mathbb{R}^3$, die durch den Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ aus der Kugel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$ herausgeschnitten wird. Skizzieren Sie diese Menge, begründen Sie, warum sie Jordan-messbar ist und berechnen Sie ihr Volumen.

b) Wir betrachten die Menge $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 0 \leq x, y, z, x+y+z \leq 1 \right\}$. Begründen Sie, warum das folgende Integral existiert und berechnen Sie es

$$\int_A x \sin y \, d(x,y,z)$$

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

a) Seien $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in U$. Zeigen Sie: Dann ist auch $f \cdot g\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$d_{x_0}(f \cdot g) = d_{x_0} f \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot d_{x_0} g.$$

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = f(A \cdot x)$. Drücken Sie den Gradienten von F durch den Gradienten von f aus.

Aufgabe 3 (4+3+3 Punkte)

Bei der Arbeitung dieser Aufgabe dürfen partielle Ableitungen und Jacobi-Matrix nicht zum Beweis der Differenzierbarkeit und zur Berechnung des Differentials genutzt werden.

a) Sei Q eine symmetrische $n \times n$-Matrix und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die quadratische Funktion $f(x) = x^T Q x$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential.

b) Beweisen Sie, dass das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \times\colon \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto u \times v. \end{aligned}$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie sein Differential.

c) Wir betrachten die Abbildung $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^2 + y^3$. Zeigen Sie, dass h differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 21.-23.6. besprochen werden:

Aufgabe Ü1

a) Wir betrachten $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Begründen Sie, warum das folgende Integral existiert und berechnen Sie es

$$\int_A x\sqrt{y} d(x,y).$$

b) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, begründen Sie, warum diese Jordan-messbar ist und bestimmen Sie ihr Volumen:

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5, 0 \leq z \leq 4 - x^2 \right\}$$

Aufgabe Ü2

Seien $f, g \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in U$. Zeigen Sie: Dann ist auch $f + g \colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$d_{x_0}(f+g) = d_{x_0} f + d_{x_0} g.$$

Aufgabe Ü3

Wir identifizieren den Raum der quadratischen Matrizen $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^{n^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n^2} \\ & A & \longmapsto & A^k. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung differenzierbar ist und bestimmen Sie ihr Differential.