Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 05.07.2016)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x|x - y|.$$

(i) Entscheiden Sie, in welchen Punkten die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert und berechnen Sie diese jeweils.

(ii) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f differenzierbar ist und berechnen Sie ihr Differential.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)
Bestimmen Sie dort, wo sie existieren, die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^\alpha,$$

wo $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)
(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

in jedem Punkt $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. In welchen Punkten ist das Differential von F invertierbar?

(ii) Zeigen Sie: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ erfüllt genau dann die beiden Bedingungen: 1) f ist differenzierbar und 2) es gilt $y\partial f/\partial x = x\partial f/\partial y$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, wenn gilt: Es existiert eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Bleibt diese Aussage noch richtig, wenn man $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ durch $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}_{>0}$ durch $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ersetzt?

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 28.06-30.06 besprochen werden:

Aufgabe Ü1 Berechnen Sie dort, wo sie existieren, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto |x^2 - y^2|.$$

Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion f differenzierbar ist.

Aufgabe Ü2

Zeigen Sie: Existieren für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt alle partiellen Ableitungen und sind diese beschränkt, dann ist f Lipschitz-stetig.

Aufgabe Ü3 Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x, y) \mapsto ((x + y)^2, (x - y)^2, xy)$$

und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$(r, s, t) \mapsto (r \cos(s + t), s \sin(r + t)).$$

Berechnen Sie in allen Punkten des Definitionsbereichs die Jacobi-Matrizen von f, g und $g \circ f$.

Aufgabe Ü4 Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, $a < b$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie: Die Funktion $f \circ \gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann konstant, wenn für alle $t \in (a, b)$ die Bedingung

$$\langle \gamma'(t), \text{grad } f_{\gamma(t)} \rangle = 0$$

erfüllt ist.