Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 24.05.2016)

Aufgabe 1 (4+4+2 Punkte)

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter, reeller Vektorraum.
(a) Sei $U \subset V$ ein endlich–dimensionaler Unterraum und $v \in V \setminus U$ ein Vektor im Komplement. Beweisen Sie, dass die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$

$$f(u) := \|v - u\|$$

ihr Minimum annimmt und erläutern Sie, warum dies positiv sein muss.
(b) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren in V. Bezeichne mit $V_n := \text{span}\{u_k \mid k = 1, ..., n\}$ den von den ersten n Vektoren aufgespannten Unterraum $V_n \subset V$. Konstruieren Sie eine neue Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren, $v_n \in V_n$ und $\|v_n\| = 1$, mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in V_{n-1}$

$$\|v_n + x\| \geq 1 = \|v_n\|.$$

(c) Zeigen Sie nun, dass der Einheitsball eines beliebigen unendlich–dimensionalen normierten Raumes nicht kompakt ist.

Aufgabe 2 (4+2+2+2 Punkte)

Sei $V = \ell^1$ versehen mit der Norm $\|.\|_1$ (siehe Übungsblätter 1 und 4).
(a) Zeigen Sie, dass durch $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine stetige, lineare Abbildung $L : \ell^1 \to \ell^1$ definiert wird, die keine stetige Linksinverse besitzt, d.h. keine stetige, lineare Abbildung $K : \ell^1 \to \ell^1$, so dass $K \circ L = id_{\ell^1}$. (siehe Bemerkung auf der Rückseite)
(b) Geben Sie eine stetige, lineare, injektive Abbildung $I : \ell^1 \to \ell^1$ an, die nicht surjektiv ist.
(c) Geben Sie eine stetige, lineare, surjektive Abbildung $P : \ell^1 \to \ell^1$ an, die nicht injektiv ist.
(d) Geben Sie eine stetige, lineare Abbildung $L : \ell^1 \to \ell^1$ an, für die es eine stetige Linksinverse $K : \ell^1 \to \ell^1$, $K \circ L = id_{\ell^1}$ gibt, aber **kein**e stetige Rechtsinverse, d.h. keine stetige lineare Abbildung $K' : \ell^1 \to \ell^1$ mit $L \circ K' = id_{\ell^1}$.

Begründen Sie in allen diesen Fällen, dass Ihre Beispiele die geforderten Eigenschaften besitzen.

Aufgabe 3 (4+3+3 Punkte)

(a) Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum und $A : V \to V$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|A\| < 1$. Zeigen Sie, dass dann die folgende Reihe in $\mathcal{L}(V, V)$ konvergiert

$$R(A) := \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

(b) Beweisen Sie, dass $(id_V - A)R(A) = R(A)(id_V - A) = id_V$ ist, also insbesondere $(id_V - A) \in GL(V) := \{L \in \mathcal{L}(V, V) \mid \exists K \in \mathcal{L}(V, V) : K \circ L = L \circ K = \mathbb{1}_V\}$, der Gruppe der Automorphismen.
(c) Zeigen Sie, dass $GL(V) \subset \mathcal{L}(V, V)$ offen ist.

Bitte wenden...

Bemerkung zur Aufgabe 2 (a) der Vorderseite: Die Abbildung L ist injektiv. Mit Methoden der Linearen Algebra folgt die Existenz einer (nicht eindeutigen) Linksinversen von L - nur kann diese eben niemals stetig sein! Der Satz über die offene Abbildung aus der VL "Funktionalanalysis" im 5. Semester impliziert, dass die Inverse einer bijektiven, stetigen, linearen Abbildung zwischen Banachräumen immer stetig ist. Die Abbildung L kann folglich nicht bijektiv und insbesondere nicht surjektiv sein.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 03.05-05.05 besprochen werden:

Aufgabe Ü1 Zeigen Sie, dass der Einheitsball eines endlich–dimensionalen normierten Raumes immer kompakt ist.

Aufgabe Ü2 Sei $(W, \|.\|_W)$ ein Banachraum und $(V, \|.\|_V)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass der Raum der beschränkten linearen Abbildungen $\mathcal{L}(V, W)$ mit der in der Vorlesung eingeführten Norm

$$\|A\| := \sup\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V \leq 1\}$$

ein Banachraum wird, d.h. überprüfen Sie die Norm–Eigenschaften und zeigen Sie, dass er vollständig ist.

Aufgabe Ü3 Zeigen Sie für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ und $B \in \mathcal{L}(W, U)$ für normierte Räume V, W, U mit den in Aufgabe Ü2 diskutierten Normen, dass

$$\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|.$$

Aufgabe Ü4 Berechnen Sie die Operator-Norm auf den quadratischen Matrizen, $M(n, \mathbb{R})$, falls auf $\mathbb{R}^n$

a) die 1–Norm,

b) die 2–Norm oder

c) im Definitonsbereich die 1-Norm und im Wertebereich die 2–Norm

gewählt wird.