Übungsblatt 9

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 21.06.2016)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Sei $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige und monoton fallende Funktion.
(i) Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$G := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f(a+k) - \int_a^{a+n+1} f(x)dx \right)$$

existiert und dass gilt: $0 \leq G \leq f(a)$.
(ii) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(a+k)$ genau dann konvergiert, wenn das uneigentliche Integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ existiert.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

In beiden Fällen müssen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals diskutieren:
(1) Berechnen Sie das uneigentliche Integral für $s > 0$:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt.$$

(2) Bestimmen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2+1} dx.$$

Hinweis: Substituieren Sie $y = \frac{1}{x}$.

Aufgabe 3(5+5 Punkte)

(1) Zeigen Sie, dass die Kurvenlänge des Graphen einer stetig differenzirebaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

gegeben ist. Berechnen sie die Länge des Abschnittes der Parabel, d.h. des Graphen der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.
(2) Skizzieren Sie das Bild der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie die Länge dieser:

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t).$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 14.06.-16.06. besprochen werden:

Ü1 Sei $x > 0$. Begründen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral endlich ist:

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Zeigen Sie: für alle $x > 0$ gilt: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Bestimmen Sie daraus $\Gamma(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Ü2 Skizzieren Sie die Bilder folgender Kurven und bestimmen Sie deren Längen:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad & \gamma(x) = (\cos^3 x, \sin^3 x) \\ \sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad & \sigma(t) = (r\cos x, r\sin x, cx). \end{aligned}$$

Dabei sind $r, c > 0$ feste Parameter.