Übungsblatt 12

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
(i) Wir bezeichnen für ein Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, mit $|I| = b - a$ die Intervalllänge. Zeigen Sie: Ist $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von offenen Intervallen mit $[0, 1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dann gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| \geq 1$.
(ii) Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Beweisen Sie, dass A keine Vitali-Menge V enthalten kann.

Lösung

(i) Zunächst können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ wieder ein offenes Intervall ist. Besteht diese Vereinigung hingegen aus mehreren Zusammenhangskomponenten, betrachten wir nur die Zusammenhangskomponente, die $[0, 1]$ enthält und zeigen die Behauptung dafür. Dang gilt die Behauptung trivialerweise auch für beliebige Vereinigungen von Intervallen.
Wir betrachten als erstes eine endliche Familie von Intervallen $\{I_n\}_{n=1}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt für $I_1 \subset I_2$, dass $|I_1| \leq |I_2|$. Seien nun $I_1 = (a_1, b_1)$ und $I_2 = (a_2, b_2)$ zwei Intervalle mit $a_1 \leq a_2$ und so, dass die Vereinigung wieder ein Intervall ist, d.h. $a_2 < b_1$. Dann sind sowohl $b_1 - a_2 > 0$ als auch $b_2 - a_2 > 0$ und es gilt:

$$|I_1 \cup I_2| = \max\{b_1, b_2\} - a_1 \leq b_1 - a_1 + b_2 - a_2 = |I_1| + |I_2|.$$

Damit folgt also für endlich viele Intervalle:

$$|\bigcup_{n=1}^{N} I_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |I_n|. \tag{1}$$

Sei nun $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Intervallen mit $[0, 1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Dann gilt für ein belibiges $N \in \mathbb{N}$:

$$|\bigcup_{n=1}^{N} I_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |I_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n|.$$

Lässt man auf der linken Seite N gegen ∞ laufen, erhält man die gleiche Aussage wie (1) für abzählbar viele Intervalle. Dann folgt:

$$1 = |[0, 1]| \leq |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n|.$$

(ii) Sei A eine Lebesgue-Nullmenge und angenommen, es existiere eine Vitali-Menge $V \subset A$. Wir betrachten die Menge $B := \cup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}}(q+A)$. Da $q+A$ eine Lebesgue-Nullmenge ist für alle $q \in \mathbb{Q}$, ist auch B als abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Lebesgue-Nullmenge. Sei $x \in [0, 1]$ beliebig. Dann existiert nach Konstruktion der Vitali-Menge V ein $y \in [0, 1]$ mit $y \in V \subset A$ und $x-y = q \in [-1, 1]\cap\mathbb{Q}$, also $x = q+y$. Demnach liegt $x \in B$ und es folgt: $[0, 1] \subset B$. Es ist bekannt, dass jede Teilmenge eine Lebesgue-Nullmenge wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist. Das führt hier aber zu einem Widerspruch, weil $[0, 1]$ keine Nullmenge ist.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
(i) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ eine σ-Algebra und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, dann ist $f_*\mathcal{A} := \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{P}(Y)$ eine σ-Algebra.

(ii) Für eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}(X)$ ist die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ definiert als der Durchschnitt aller σ-Algebren $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{O}(X) \subset \mathbb{P}(X)$ bzw. $\mathcal{F}(X) \subset \mathbb{P}(X)$ die Menge aller offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d), dann gilt:

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X)).$$

Lösung

(i) Wir prüfen alle Eigenschaften der Definition einer σ-Algebra nach:

- Es gilt $Y \in f_*\mathcal{A}$, da $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$.
- Sei $B \in f_*\mathcal{A}$. Dann ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ und

  $$f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

  weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Also ist $Y \setminus B \in f_*\mathcal{A}$.
- Sei $\{B_i\}_{i \in I} \subset f_*\mathcal{A}$ eine abzählbare Familie von Mengen aus $f_*\mathcal{A}$. Dann ist

  $$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}.$$

  Also ist $\bigcup_{i \in I} B_i \in f_*\mathcal{A}$.

Wegen dieser Eigenschaften ist $f_*\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

(ii) Für alle offenen Mengen $O \subset X$ ist $X \setminus O$ abgeschlossen. Da nach Eigenschaften einer σ-Algebra für $O \in \mathcal{A}$ auch $X \setminus O \in \mathcal{A}$ ist, muss jede σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält, auch alle abgeschlossenen Mengen enthalten, insbesondere auch der Durchschnitt aller dieser σ-Algebren. Es ist also

$$\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X)) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)).$$

Da für alle abgeschlossenen Mengen das Komplement offen ist, kann vollkommen analog argumentiert werden, dass $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X))$. Damit ergibt sich aber sofort die Behauptung:

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X)).$$

Aufgabe 3 (2+4+4 Punkte)
(i) Es sei X eine abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ ist endlich oder } X \setminus A \text{ ist endlich}\}$.
(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{A} \neq \mathbb{P}(X)$.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist und entscheiden Sie, ob $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Begründen Sie ihre Antwort.
(ii) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{E} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{P}(X)$ eine abzählbare Familie nichtleerer paarweise disjunkter Teilmengen von X, sodass $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gilt. Bestimmen Sie die von $\mathbb{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$: Begründen Sie!

Lösung

(i) (a) Da X abzählbar unendlich ist, kann X dargestellt werden als $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Menge $A = \{x_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Dann ist A offensichtlich unendlich und $X \setminus A = \{x_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist ebenfalls unendlich. Also ist $A \notin \mathcal{A}$ und damit $\mathcal{A} \neq \mathbb{P}(X)$.
(b) Wir weisen alle Eigenschaften einer Algebra nach:

- Es ist $X \in \mathcal{A}$, da $X \setminus X = \emptyset$ endlich ist.
- Sei $A \in \mathcal{A}$. Ist A endlich, so ist $X \setminus (X \setminus A) = A$ endlich. Andernfalls ist $X \setminus A$ endlich und damit in jedem Fall $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Sind beide endlich, so ist auch $A \cup B$ endlich. Ist hingegen $X \setminus A$ endlich, so ist
$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \subset X \setminus A$$
ebenfalls endlich (analog, falls $X \setminus B$ endlich). Also ist in jedem Fall $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Mit diesen Eigenschaften ist $\mathcal{A}$ eine Algebra.
$\mathcal{A}$ ist aber keine σ-Algebra. Dazu betrachten wir die Mengen $A_n := \{x_{2n}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann sind alle A_n endlich, also in $\mathcal{A}$. Aber $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$, wobei hier A die Menge aus (a) ist, die nicht in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Also kann $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra sein.

(ii) Behauptung:
$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) = \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \mid I \subset \mathbb{N} \right\}.$$
Da abzählbare Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{E}$ nach Definition in jeder σ-Albegra enthalten sein müssen, die $\mathcal{E}$ enthält, muss die oben definierte Menge in der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ-Algebra enthalten sein. Es genügt also zu zeigen, dass diese Menge eine σ-Algebra ist, da sie dann auch die kleinste sein muss.
Wir weisen wieder die einzelnen Eigenschaften einer σ-Algebra nach.

- $X \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$, da für $I = \mathbb{N}$: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.
- Sei $A \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$. Dann existiert ein $I \subset \mathbb{N}$ mit $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Da die A_n alle disjunkt sind, gilt:
$$X \setminus A = X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}\setminus I} A_j = \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}), \quad \text{mit } J := \mathbb{N} \setminus I \subset \mathbb{N}.$$
- Sei $\{B_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ eine abzählbare Familie von Mengen aus $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ und $I_j \subset \mathbb{N}$ so, dass $B_j = \bigcup_{i\in I_j} A_i$. Dann ist
$$\bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in\cup_{j\in J} I_j} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}), \quad \text{mit } I = \bigcup_{j\in J} I_j \subset \mathbb{N}.$$

Damit erfüllt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ alle Eigenschaften einer σ-Algebra und nach der Bemerkung oben ist diese Menge die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.