Übungsblatt 5

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Teilmengen keine glatten Untermannigfaltigkeiten sind:

a) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2\}$.

b) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 = y^2\}$.

Lösung

(a) Angenommen, K sei eine Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und einen Diffeomorphismus

$$\varphi : B_\varepsilon(0) \cap K \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2$$

auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^2$. Sei $0 \in V$ mit $\varphi(0) = 0$. Da φ ein Homöomorphismus ist, ist φ insbesondere bijektiv und

$$\varphi : (B_\varepsilon(0) \cap K) \setminus \{0\} \longrightarrow V \setminus \{0\}$$

ist ebenfalls ein Homöomorphismus. K lässt sich schreiben als

$$K = \{(x, y, z) | z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)\} \dot\cup \{(0, 0, 0)\}.$$

Das bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $(B_\varepsilon(0) \cap K) \setminus \{0\}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Andererseits ist V als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ selbst und deshalb ist $V \setminus \{0\}$ zusammenhängend. Weil φ ein Homöomorphismus ist, müsste dann aber auch $\varphi^{-1}(V \setminus \{0\}) = (B_\varepsilon(0) \cap K) \setminus \{0\}$ zusammenhängend sein. Das ist ein Widerspruch. K kann also keine glatte Untermannigfaltigkeit sein. Da wir nur topologische Eigenschaften genutzt haben, kann K auch keine topologische Untermannigfaltigkeit sein.

(b) Angenommen, P sei eine glatte Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es einen Diffeomorphismus, also eine Parametrisierung, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow P \subset \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$. Da γ ein Diffeomorphismus ist, muss für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\gamma'(t) \neq 0$ gelten. Wir zeigen nun, dass das aber nicht sein kann. Sei $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\gamma_1(t)^3 = \gamma_2(t)^2. \tag{1}$$

Da γ glatt ist, können wir (1) auf beiden Seiten beliebig oft nach t ableiten. Wenn wir dies drei Mal ausführen, so erhalten wir:

$$3\gamma_1(t)^2\gamma_1'(t) = 2\gamma_2(t)\gamma_2'(t) \tag{2}$$

$$6\gamma_1(t)\gamma_1'(t)^2 + 3\gamma_1(t)^2\gamma_1''(t) = 2\gamma_2'(t)^2 + 2\gamma_2(t)\gamma_2''(t) \tag{3}$$

$$6\gamma_1'(t)^3 + 18\gamma_1(t)\gamma_1'(t)\gamma_1''(t) + 3\gamma_1(t)^2\gamma_1'''(t) = 6\gamma_2'(t)\gamma_2''(t) + 2\gamma_2(t)\gamma_2'''(t). \tag{4}$$

Setzen wir $t = 0$ in (3) ein, so ehalten wir wegen $\gamma(t) = 0$:

$$0 = 2\gamma_2'(t)^2,$$

woraus sofort $\gamma_2'(0) = 0$ folgt. Setzen wir nun $t = 0$ auch in (4) ein, so ergibt sich

$$g\gamma_1'(0)^3 = 0.$$

Also ist $\gamma'(0) = 0$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. P kann also keine glatte Untermannigfaltigkeit sein.