Übungsblatt 7

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
a) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension n, $L \subset M$ und $k \leq n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) L ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

b) Für jeden Punkt $p \in L$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, sodass $\varphi(U \cap L) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap V$.

c) Für jeden Punkt $p \in L$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p sowie eine glatte Abbildung $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ für die $dF_q : T_qM \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv für alle $q \in U$ und $F^{-1}(0) = U \cap L$ ist.

b) Seien M und $L \subset N$ glatte Untermannigfaltigkeiten und $f : M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung. Sei für jeden Punkt im Urbild $q \in f^{-1}(L)$ für das Differential $df_q(T_qM) + T_{f(q)}L = T_{f(q)}N$ erfüllt. Beweisen Sie, dass $f^{-1}(L) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie deren Dimension in Termen der gegebenen Unermannigfaltigkeiten.

Lösung

a) *a)* $\Longrightarrow$ *b)*: Sei $p \in L$ beliebig. Da M eine Untermannigfaltigkeit ist, exisitert eine offene Umgebung $U_1 \subset M$ von p sowie ein Diffeomorphismus $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ auf eine offene Menge $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_1(p) = 0$. Da nach Voraussetzung auch L eine Untermannigfaltigkeit ist, existiert eine weitere offene Umgebung $U_2 \subset L$ von p und ein Diffeomorphismus $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ auf eine offene Menge $V_2 \subset \mathbb{R}^k$ mit $\varphi_2(p) = 0$. U_2 kann so klein gewählt werden, dass $U_2 \subset U_1$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & V_2 \times \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x,a) & \longmapsto & \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x) - (0,a). \end{array}$$

Für diese Abbildung gilt:

$$df_{(x,a)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})_1}{\partial x_k}(x) & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \frac{\partial(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})_k}{\partial x_k}(x) & \\ \hline & * & & -E \end{array}\right)$$

Also gilt für die Determinante

$$\det df_{(x,a)} = (-1)^{n-k} \det \left(\frac{\partial(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,k} \neq 0,$$

weil φ_1 und φ_2 Diffeomorphismen sind. Insbesondere ist f um 0 ein lokaler Diffeomorphismus mit $f(0) = 0$. Es exisitieren also offene Mengen $W_1 \subset V_2 \times \mathbb{R}^{n-k}$ und $W_2 \subset \mathbb{R}^n$. sodass $f : W_1 \longrightarrow W_2$ ein Diffeomorphismus ist und es ist $0 \in W_2$. Wir definieren nun

$$U := \varphi_1^{-1}(W_2 \cap V_1) = \varphi_1^{-1}(W_2) \cap U_1, \quad \varphi := f^{-1} \circ \varphi_1|_U : U \longrightarrow V := f^{-1}(W_2 \cap V_1) \subset \mathbb{R}^n.$$

φ ist als Verknüpfung von Diffeomorphismen ebenfalls ein Diffeomorphismus und U eine offene Umgebung von p in M. Nach Konstruktion von f gilt: $f(a,0) \in \varphi_1(U_1 \cap L)$ und damit folgt aus Dimennsionsgründen:

$$\varphi(U \cap L) = \mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

b) $\Longrightarrow$ *c)*: Sei $p \in M$ beliebig und $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) : U \longrightarrow V$ ein solcher Diffeomorphismus. Wir definieren

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \quad F = (\varphi_{k+1}, ..., \varphi_n).$$

Dann gilt $F(U \cap L) = 0_{\mathbb{R}^{n-k}}$ und weil für $p \in U \setminus L$ $(\varphi_1, ..., \varphi_n)(p) \notin \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap V$, ist $F^{-1}(0) = U \cap L$. Für $q \in U$ hat das Differential von F die Form

$$dF_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Weil dF_q ein Block von $d\varphi_q$ und φ ein Diffeomorphismus ist, hat dF_q für alle $q \in U$ maximalen Rang und ist damit surjektiv.
c) $\Longrightarrow$ *a)*: Folgt aus Satz aus der Vorlesung.

b) Seien $m := dimM$, $n := dimN$ und $l = dimL$. Sei $p \in f^{-1}(L)$ beliebig. Dann ist $f(p) \in L$ und da $L \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit ist, folgt aus Aufgabenteil a) mit der Eigenschaft c), dass um $f(p)$ eine offene Umgebung $U \subset N$ existiert mit einer glatten Abbildung $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-l}$, sodass $dF_q : T_qM \longrightarrow \mathbb{R}^{n-l}$ surjektiv ist für alle $q \in U$ und $F^{-1}(0) = U \cap L$. Wir definieren

$$V := f^{-1}(U) \subset M, \quad G := F \circ f|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-l}.$$

Da f nach Voraussetzung stetig ist, ist V eine offene Umgebung von p in M und G ist als Verknüpfung glatter Funktionen glatt.
Da $F(U \cap L) = 0$, ist $dF_{f(p)}|_{T_{f(p)}L} = 0$. Also ist $dF_{f(p)}|_{T_pN \diagup T_{f(p)}L}$ ebenfalls surjektiv. Da nach Voraussetzung für $p \in f^{-1}(L)$

$$df_p(T_pM) + T_{f(p)}L = T_{f(p)}N \quad \Longrightarrow \quad T_pN \diagup T_{f(p)}L \subset df_p(T_pM)$$

gilt, folgt mit der Kettenregel:

$$dG_p(T_pM) = dF_{f(p)} \circ df_p(T_pM) = \mathbb{R}^{n-l}.$$

Da G glatt ist, ist die Surjektivität von dG eine offene Bedingung und nach eventuellem Verkleinern von V ist dG_q surjektiv für alle $q \in V$. Desweiteren gilt:

$$G^{-1}(0) = (F \circ f|_V)^{-1}(0) = f^{-1}(F^{-1}(0)) = f^{-1}(U \cap L) = V \cap f^{-1}(L).$$

Nach Eigenschaft c) ist $f^{-1}(L) \subset M$ also eine Untermannigfaltigkeit. Die Dimension lässt sich dann einfach berechnen. Sei $x := dimf^{-1}(L)$. Dann muss dG surjektiv auf $\mathbb{R}^{m-x}$ sein, also gilt:

$$m - x = n - l \quad \Longleftrightarrow \quad x = m - n + l.$$

Es sei noch bemerkt, dass dieser Ausdruck für x immer ≥ 0 ist, weil ansonsten die Voraussetzung $df_q(T_qM) + T_{f(q)}L = T_{f(q)}N$ gar nicht erfüllt sein kann.