Musterlösung Blatt 2

A 1 Lösen
$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x(0) = 1, \; y(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Mit $\xi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hat $(*)$ die Form
$$\begin{cases} \xi'(t) = A \cdot \xi(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \quad \text{mit}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Picard-Iteration: $\xi^{[0]}(t) := \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$$\xi^{[k+1]}(t) = \xi_0 + \int_0^t A \cdot \xi^{[k]}(s)\, ds.$$

Insbesondere ist
$$\xi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$
$$\xi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}$$
$$\xi^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 - \frac{s^2}{2} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ t - \frac{t^3}{6} \end{pmatrix}.$$

Zeigen mit vollständiger Induktion nach $k \geq 0$:
$$\xi^{[2k]}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix}$$

und

$$\xi^{[2k+1]}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix}.$$

Für $k=0$ folgt die Aussage aus den obigen Formeln für $\xi^{[0]}$ und $\xi^{[1]}$. Sei die Aussage für ein $k \geq 0$ bewiesen. Dann gilt

$$\xi^{[2(k+1)]}(t) = \xi_0 + \int^t A \cdot \xi^{[2k+1]}(s)\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{s^{2j-1}}{(2j-1)!} \\ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{s^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix}$$ und

$$\xi^{[2k+3]}(t) = \xi_0 + \int_0^t A \cdot \xi^{[2(k+1)]}(s)\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{s^{2j-1}}{(2j-1)!} \\ \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \frac{s^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\ \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\ \sum_{j=1}^{k+2} (-1)^{j+1} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{pmatrix}.$$

Da die auftretenden Summen für $k \to \infty$ gegen cos bzw. sin konvergieren, erhalten wir als Lösung

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

A2 (i) Wir berechnen

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2x'(t)\, x''(t) + U'(x(t))\, x'(t) = -U'(x(t))\, x'(t) + U'(x(t))\, x'(t) = 0.$$

(ii) ($\Rightarrow$) Sei $x: I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP $\begin{cases} x''(t) = -U'(x(t)) \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0 \end{cases}$

Nach (i) gilt dann

$(x'(t))^2 = 2(E - U(x(t)))$. Da $U(x(t)) < E$ $\forall t \in I$ nach Annahme, folgt

$x'(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))}$.

($\Leftarrow$) Gilt $x'(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))}$, dann folgt durch Quadrieren:

$E = \frac{x'(t)^2}{2} + U(x(t))$ und daraus durch Differenzieren $x'(t)x''(t) + U'(x(t))x'(t) = 0$

$\Rightarrow x'(t)\left(x''(t) + U'(x(t))\right) = 0$. Da $x'(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))} \neq 0$, folgt $x''(t) = -U'(x(t))$.

Die Implikation "$\Rightarrow$" bleibt unter der schwächeren Voraussetzung $U(x(t)) \leq E$ erhalten. Als ein Gegenbeispiel für "$\Leftarrow$" betrachte

$E = \frac{1}{2}$, $U(x) = \frac{1}{2}x^2$

Die Funktion $x: (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $x(t) = \begin{cases} \sin t & t \in (0, \pi/2] \\ 1 & t \in [\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$

erfüllt $x'(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))}$ für alle $t \in (0,\pi)$, es ist aber für $t \in [\frac{\pi}{2}, 0)$

$x''(t) = 0 \neq -1 = -U'(x(t))$.

(iii) Sei jetzt $u(x) = -\frac{1}{x}$. Lösen

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2\left(E + \frac{1}{x(t)}\right)} \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Für $E + \frac{1}{x} > 0$ folgt

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{2\left(E + \frac{1}{x(t)}\right)}} = 1.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{\sqrt{2\left(E + \frac{1}{x(s)}\right)}} ds = t \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{2\left(E + \frac{1}{y}\right)}} dy = t$$

$$\Rightarrow x(t) = F^{-1}(t), \text{ wo}$$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\left(E + \frac{1}{y}\right)}} dy.$$

Angenommen, das AWP besitzt eine Lösung $x = x(t)$ auf $[0, \infty)$. Wir haben $x''(t) = -u'(x(t)) = -\frac{1}{x^2(t)}$, insbes. $x(t) \neq 0 \ \forall t$.

Sei o.B.d.A. $x_0 > 0$ (Fall $x_0 < 0$ analog). Wegen Stetigkeit ist dann $x(t) > 0 \ \forall t \geq 0$. Wäre $x(t)$ beschränkt, z.B. $x(t) < C \ \forall t > 0$, dann würde folgen: $x''(t) < -\frac{1}{C^2} \Rightarrow$

$x'(t) < v_0 - \frac{t}{C^2} \Rightarrow x(t) < x_0 + tv_0 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{C^2} \Rightarrow$

$x(t_0) = 0$ für ein $t_0 > 0$, ↯. Also ist $x(t)$ unbeschränkt $\Rightarrow \exists\ (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x(t_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \Rightarrow \underbrace{u(x(t_n))}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \frac{(x'(t_n))^2}{2} \geq 0 \text{ für}$$

n groß.

Andererseits ist $E = \mathcal{U}(x(t)) + \frac{(x'(t))^2}{2} = \text{const}$
nach (ii). Also folgt: $E \geq 0$, d.h.

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{1}{x_0} \geq 0 \iff \underline{\underline{v_0 \geq \sqrt{2x_0}}}.$$

Zeigen umgekehrt: Falls $v_0 \geq \sqrt{2x_0} \iff E \geq 0$, dann existiert eine Lsg. auf $[0, \infty)$.
Wir haben $x'(t) = \sqrt{2(E + \frac{1}{x(t)})} \geq \sqrt{2E} \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Es folgt $x(t) \geq x_0 > 0 \; \forall t$

$\Rightarrow x'(t) \leq \sqrt{2(E + \frac{1}{x_0})} \; \forall t$. Wäre nun $[0, R)$, $R < \infty$, das maximale Existenzintervall der Lsg., dann müsste nach VL gelten: $\lim_{t \to R} x'(t) = \infty$, ↯

A3

(i) Mit $h(t) = x^2(t) + y^2(t)$ ist

$$h'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$
$$= -2x(t)y(t) - 2x^4(t) + 2y(t)x(t) - 2y^4(t)$$
$$= -2x^4(t) - 2y^4(t)$$

Es folgt

$$-2h(t)^2 = -2x^4(t) - 4x^2(t)y^2(t) - 2y^4(t) \leq$$
$$h'(t) = -2x^4(t) - 2y^4(t) =$$
$$-x^4(t) - \underbrace{(x^4(t) + y^4(t))}_{\geq 2x^2(t)y^2(t)} - y^4(t) \leq -x^4(t) - 2x^2(t)y^2(t)$$
$$-y^4(t) = -(x(t) + y(t))^2 = -h(t)^2.$$

(iii) Wissen: Wäre (c, d), $d < \infty$, ein maximales Existenzintervall der Lsg, dann müsste gelten: $\lim_{t \to d} \left\| \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\| = \infty$.

Aus der DGL würde dann folgen:

$\lim_{t \to d} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \infty \Rightarrow \lim_{t \to d} h(t) = \infty$.

Wegen (i) ist aber $h(t)$ beschränkt: $h(t) \geq 0$ für alle t nach Def. von h, Andererseits $h'(t) \leq 0 \quad \forall t \Rightarrow$ $h(t) \leq h(c) \quad \forall\, t$, Widerspruch.

(iii) Aus (i), (ii) folgt, dass $h(t)$ beschränkt ist für jede Lsg. $(x(t), y(t))$ $\Rightarrow$ jede Lösung $(x(t), y(t))$ bleibt für $t \to \infty$ beschränkt.

Andererseits folgt aus $h'(t) \leq -h^2(t)$: $\frac{h'(t)}{h^2(t)} \leq -1 \Rightarrow$

$$h(t) \leq \frac{1}{t + \frac{1}{h(c)} - c} \quad \forall\ t \in (c, \infty).$$

Da $h(t) \geq 0 \ \forall t$,

folgt: $h(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \Rightarrow$

$$(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \to \infty]{} (0, 0).$$