# Übungsblatt 7

## Analysis III WS 2016/17

### Musterlösung

**Aufgabe 2** (5+5 Punkte)
Durch die Identifizierung $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ können wir $S^3$ als die Untermannigfaltigkeit

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

darstellen. Sei dann

$$p : S^3 \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3, \quad p(z_1, z_2) = (2z_1\overline{z_2}, |z_1|^2 - |z_2|^2)$$

(a) Zeigen Sie, dass $p$ eine Submersion $S^3 \to S^2$ induziert.

(b) Konstruieren Sie Diffeomorphismen $p^{-1}(\{c\}) \cong S^1$ für alle $c \in S^2$.

**Lösung:**

(a) Zuerst müssen wir zeigen, dass $p(S^3) \subset S^2$. Dies folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
\|p(z_1, z_2)\|^2 &= 4|z_1|^2|z_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_1|^2)^2 \\
&= |z_1|^4 + 2|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4 \\
&= (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $p$ ist nun eine Submersion, falls das Differential

$$d_z p : T_z S^3 \to T_{p(z)} S^2$$

für alle $z = (z_1, z_2) \in S^3$ surjektiv ist. Dies ist equivalent zu

$$\dim \ker d_z p = \dim T_z S^3 - \dim T_{p(z)} S^2 = 1.$$

Wir können das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}$ ausdrücken als $\langle u, v \rangle = \mathrm{Re}(u\overline{v})$. Dann ergibt sich für den Tangentialraum von $S^3$, dass

$$X = (X_1, X_2) \in T_z S^3 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_1\overline{X}_1 + z_2\overline{X}_2 = 0.$$

Das Differential von $p$ in $z$ ist

$$d_z p(X) = \frac{d}{dt} p(z + tX)|_{t=0} = (X_1\overline{z}_2 + z_1\overline{X}_2, z_1\overline{X}_1 + \overline{z}_1 X_1 - z_2\overline{X}_2 - \overline{z}_2 X_2)$$

Die Bedingung $d_z p(X) = 0$ für $X \in T_z S^3$ ist dann equivalent zu den Gleichungen:

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{X}_1 + z_2\overline{X}_2) = 0 \tag{1}$$

$$X_1\overline{z}_2 + z_1\overline{X}_2 = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{X}_1 - z_2\overline{X}_2) = 0 \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt, dass $\mathrm{Re}(z_1\overline{X}_1) = \mathrm{Re}(z_2\overline{X}_2) = 0$. Angenommen es ist $z_1 \neq 0$. Dann ergibt (2), dass

$$\overline{X}_2 = \frac{-X_1\overline{z}_2}{z_1}$$

und aus $\mathrm{Re}(z_1\overline{X}_1) = 0$ folgt, dass

$$X_1 = \frac{i\alpha}{\overline{z}_1}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Also ist

$$X \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{i}{\overline{z}_1} \\ \frac{iz_2}{|z_1|^2} \end{pmatrix}.$$

Der Fall $z_2 \neq 0$ folgt analog. Da beide Komponenten nicht gleichzeitig verschwinden können, folgt die Behauptung.

(b) Sei $c = (w, r) \in S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Dann erfüllt $z = (z_1, z_2) \in p^{-1}(w, r)$ die Gleichungen

$$2z_1\overline{z}_2 = w \tag{4}$$
$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = r \tag{5}$$
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \tag{6}$$

Aus $(5) + (6)$ folgt $|z_1|^2 = \frac{1}{2}(r + 1)$. Sei zuerst $r \neq -1$. Dann folgt, dass $z_1 \neq 0$ und $z_2 = \frac{\overline{w}}{2\overline{z}_1}$. Also gibt es ein $e^{i\theta} \in S^1$, sodass

$$z = (\sqrt{\frac{1}{2}(r+1)}e^{i\theta}, \sqrt{\frac{1}{2(r+1)}}\overline{w}e^{i\theta}) =: \Phi(e^{i\theta}).$$

Andererseits gilt für alle $e^{i\theta} \in S^1$, dass

$$p(\Phi(e^{i\theta})) = (2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(r+1)}e^{i\theta}\sqrt{\frac{1}{2(r+1)}}we^{-i\theta}, \frac{1}{2}(r+1) - \frac{|w|^2}{2(r+1)}) = (w, r).$$

Also ist die Abbildung $\Phi : S^1 \to p^{-1}(w, r)$ wohl-definiert und surjektiv. Sei

$$\Psi : p^{-1}(w, r) \to S^1, \Psi(z) = \sqrt{\frac{2}{r+1}}z_1.$$

Dann ist $\Psi(\Phi(e^{i\theta})) = \sqrt{\frac{2}{r+1}}\sqrt{\frac{1}{2}(r+1)}e^{i\theta} = e^{i\theta}$ und analog ergibt sich $\Phi(\Psi(z)) = z$. Da $\Phi$ und $\Psi$ offensichtlich glatt sind, muss $\Phi$ ein Diffeomorphismus sein.

Aus $r = -1$ folgt $z_1 = w = 0$ und $|z_2| = 1$, d.h. $z = (0, e^{i\theta})$. Wie oben schließt man dann, dass

$$\Phi : S^1 \to p^{-1}(0, -1), \quad \Phi(e^{i\theta}) = (0, e^{i\theta})$$

ein Diffeomorphismus ist.