Musterlösung Blatt 8 ML Blatt 8 (1)

a) Aus Blatt 6 Aufgabe 3 folgt
dass die stereographische Projektion

$$\varphi: S^4 \setminus \{(0,\dots,0,-1)\} \to \mathbb{R}^4$$
$$(x_1,\dots,x_{4+1}) \mapsto \left(\frac{2x_1}{1+x_{4+1}},\dots,\frac{2x_4}{1+x_{4+1}}\right)$$

ein Diffeomorphismus ist.
Es gilt $\varphi(S^4_+) = \bar{B}^4_2 = \{(x_1,\dots,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2+\dots+x_4^2 \leq 4\}$,
andererseits ist $\bar{B}^4_2 \cong \bar{B}^4_1 = \{(x_1,\dots,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2+\dots+x_4^2 \leq 1\}$
mittels des Diffeo $x \mapsto \frac{1}{2}x$.
Da $\bar{B}^4_2 \subset \mathbb{R}^4$ eine Umf mit Rand ist,
folgt die Aussage.

b) Angenommen, $M := [0,\infty)^2 \subset \mathbb{R}^2$ wäre
eine diff-bare Umf mit Rand. Dann wäre $\partial M \subset \mathbb{R}^2$ eine 1-dim
Umf. Aus $\{0\}\times[0,\infty) \subset \partial M$ folgt $\{0\}\times\mathbb{R} \subseteq T_{(0,0)}(\partial M)$
und aus $[0,\infty)\times\{0\} \subset \partial M$ folgt $\mathbb{R}\times\{0\} \subseteq T_{(0,0)}(\partial M)$,
also insgesamt $T_{(0,0)}(\partial M) = \mathbb{R}^2$ $\lightning$.
$\partial M = \{0\}\times[0,\infty) \cup [0,\infty)\times\{0\}$.

Nach der Identifikation $[0,\infty)\times[0,\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
ist die Abbildung

$$\varphi: [0,\infty)\times[0,\infty) \to \mathbb{H}^2$$
$$z \mapsto z^2$$

ein Homöomorphismus. Da außerdem $d\varphi_z \neq 0$ ist für $z \neq 0$, ist die Einschränkung
von φ auf $[0,\infty)\times[0,\infty) \setminus \{(0,0)\}$ ein
Diffeomorphismus.

ML Blatt 8 (2)

c) Wir betrachten $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0. \end{cases}$$

Mit Induktion folgt, dass f ~~auf~~ ~~$\mathbb{R}\setminus\{0\}$~~ beliebig oft diff.bar ist (wobei $f^{(n)}(t)$ für $t > 0$ die Form $f^{(n)}(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t}$ hat, wo P_n ein Polynom vom Grad $2n$ ist.

Mit $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\phi(x) := \frac{f(2 - \|x\|)}{f(2 - \|x\|) + f(\|x\| - 1)}$$

gilt $\phi|_{B_1(0)} \equiv 1$, da für $\|x\| \leq 1$ gilt: $f(\underbrace{\|x\| - 1}_{\leq 0}) = 0 \Rightarrow \phi(x) = 1$. Für $\|x\| \geq 2$ ist $f(\underbrace{2 - \|x\|}_{\leq 0}) = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0$.

Aufgabe 2

a) Aus Blatt 6 Aufgabe 3 c) folgt

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

bzw. in komplexen Koordinaten

$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})(z) = \frac{1}{z}$. (analog $(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})(z) = \frac{1}{z}$).

b) Sei $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplexes, nicht-konstantes Polynom und $f: S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$f(z) = \begin{cases} \varphi_N^{-1}(p(\varphi_N(z))) & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty. \end{cases}$$

Zeigen, dass f glatt ist.

- $f|_{\underbrace{S^2 \setminus \{\infty\}}_{\text{aufgefasst als } \mathbb{C} \text{ mithilfe von } \varphi_N}} = p$ glatt, da Polynom

- Nach der Identifikation $S = 0 \in \mathbb{C}$ gilt für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

③ ML Blatt 8

$$f(z) = \varphi_S^{-1}(q(\varphi_S(z))) \quad \text{mit}$$

$$q(z) = ((\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})^{-1} \circ p \circ (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}))(z) = \frac{1}{p(\frac{1}{z})}$$

Falls $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, dann

$$q(z) = \frac{1}{p(\frac{1}{z})} = \frac{z^n}{a_n + a_{n-1} z + \dots + a_0 z^n}.$$

Da andererseits $f(\infty) = \infty$, ist $f(\infty) = \varphi_S^{-1} q(\varphi_S(\infty)) \overset{0}{=} \infty$,

also $f(z) = \varphi_S^{-1} q(\varphi_S(z))$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, wo

$$q(z) = \frac{z^n}{a_n + a_{n-1} z + \dots + a_0 z^n}.$$

Insbesondere ist $f|_{S^2\setminus\{0\}}$ glatt.

(c) Da in der Karte $\varphi_N : S^2\setminus\{N\} \to \mathbb{C}$ $f = p$ ein komplexes Polynom ist, gilt bzgl. φ_N

$$df_z = \frac{d}{dz}(a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0) = n a_n z^{n-1} + \dots + 2 a_2 z + a_1.$$

Da df_z ein Polynom $\neq 0$ ist, besitzt df nur endlich viele Nullstellen. $\Rightarrow$ $\{w \in S^2 \mid \exists z \in S^2$ s.d. $df_z = 0$ und $f(z) = w\}$ ist endlich.

(d) Indem wir $S^2\setminus\{pkt\}$ als homöomorph zu $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ darstellen, g.z.z., dass das Komplement von endlich vielen Punkten in $\mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend ist.

Diese Aussage folgt aus der Tatsache, dass für zwei beliebige Punkte in $\mathbb{R}^2$ ein sie verbindender Weg existiert, der einen gegebenen dritten Punkt nicht trifft.

e) Betrachte für ~~bel.~~ ein geg. nicht-konstantes Polynom p die zu b) def. Ass. $f: S^2 \to S^2$.

Nach b) ist f glatt und nach c) ex. eine endl. TM $\Pi \subset S^2$, s.d. $df \neq 0$ gilt auf $S^2 \setminus \Pi$. Wähle $z_0 \in S^2 \setminus \Pi$ beliebig. O.B.d.A ist $0 \notin f(\Pi)$ (andernfalls ist $0 \in f(S^2) \Rightarrow$ p besitzt eine kpl. Nullstelle) und nach d) ex. ein stetiger Weg zwischen 0 und $f(z_0)$ in $S^2 \setminus f(\Pi)$. Mithilfe von Ü3 folgt hieraus: $f^{-1}(0) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ p besitzt eine Nullstelle $\square$