Übungsblatt 1

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 01.11.2016

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Anfangwertporbleme mithilfe der in der Vorlesung besprochenen Lösungsverfahren (für das Erraten werden keine Punkte vergeben!). Geben Siedabei das größtmögliche intervall an, auf dem die gesuchte Funktion definiert ist.
(a) $f'(t) = e^{-f(t)} \cos t, f(0) = 0$ und
(b) $f'(t) = f(t) - f^3(t)$, $f(0) = 1$.
(c) $tf'(t) = f(t) + t^2$, $f(1) = 1$ für $t > 0$.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)
Wir betrachten für $b, c \in \mathbb{R}$, $b, c \neq 0$ die Differentialgleichung

$$y'(t) = cy(t) - by^2(t).$$

(i) Sei $a := c/b > 0$. Zeigen Sie: Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, welche die obige Gleichung löst, und gilt $y(t_0) < a$ (bzw. $y(t_0) > a$) für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, dann ist $y(t) < a$ (bzw. $y(t) > a$) für alle $t \geq t_0$.
(ii) Benutzen Sie ein Lösungsverfahren aus der Vorlesung oder aus der Übung, um alle nicht-verschwindenden Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der obigen Differentialgleichung zu finden. Zeigen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$ gilt für $c > 0$.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
(i) (Fallgeschwindigkeit in Atmosphäre) Lösen Sie das Anfangswertproblem $mv'(t) = -mg + a(v(t))^2$, $v(0) = 0$ ($m, g, a > 0$). Bestimmen Sie das Verhalten von $v(t)$ für $t \to \infty$.

(ii) (Energieverlust durch Reibung) Es seien $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen des Systems

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)),$$

$$y'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) - R(y(t)),$$

wobei $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind. Zeigen Sie:
(a) Falls $R \equiv 0$ ist, dann ist $H(x(t), y(t))$ konstant.
(b) Ist $H(x, y) = V(x) + E(y)$, wo $V, E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $E'(y)R(y) \geq 0$ für alle y, dann ist die Funktion $t \mapsto H(x(t), y(t))$ monoton fallend.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 25.10-27.10 besprochen werden:

Aufgabe Ü1 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y'(t) = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, (ii) $y'(t) = ty^2(t)$, $y(0) = y_0$.

Aufgabe Ü2 Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(t) = -ty(t)\log y(t), y(0) = y_0 > 1$.

(i) Zeigen Sie, ohne das Problem explizit zu lösen, dass jede Lösung $y(t)$ auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ streng monoton wächst, auf dem Intervall $[0, \infty)$ streng monoton fällt und ihre Werte im Intervall $[1, y_0]$ annimmt.
(ii) Lösen Sie das obige Anfangwertproblem.

Aufgabe Ü3 Wir betrachten die *Bernoullische Differentialgleichung* $x'(t) = a(t)x(t)+b(t)(x(t))^n$, $n \in \mathbb{R}$, $n \notin \{0, 1\}$, $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

(i) Benutzen Sie den Ansatz $y(t) := (x(t))^{1-n}$, um die obige Gleichung auf eine lineare inhomogene Differentialgleichung zurückzuführen.
(ii) Lösen Sie die Gleichung für $a(t) = b(t) \equiv 1$, $n = -2$.

Aufgabe Ü4 (Lotka-Volterra Regeln) Wir betrachten für differenzierbare Funktionen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t), \end{aligned}$$

wo a, b, c, d fixierte positive reelle Zahlen sind.

(i) Bestimen Sie alle konstanten Lösungen. Zeigen Sie, dass für jede Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems die Funktion $V(t) := cx(t) - d\log x(t) + by(t) - a\log y(t)$ konstant ist.
(ii) Sei $(x(t), y(t))$ eine positive Lösung des Systems mit periode $T > 0$, d. h. es gelte $(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ für alle T. Berechnen Sie die Mittelwerte $\overline{x} := \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ und $\overline{y} := \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$.
Hinweis: Werten Sie die Integrale $\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)}dt$ und $\int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)}dt$ auf zwei verschiedenen Wegen aus.