Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 13

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 07.02.2017

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(i) Für ein $B \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ sei $\mu_B : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$. Zeigen Sie, dass μ_B wieder ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$ mit $\mu(A_i) < \infty$, sich das Maß der Vereinigung $A = \cup A_i$ durch folgende Formel berechnen lässt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J| = k}} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)
(i) Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring auf X, μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ und μ^* das zugehörige äußere Maß. Sei $T : X \to X$ eine bijektive Abbildung, sodass $A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow T(A) \in \mathcal{R}$ und $\mu(A) = \mu(T(A))$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Zeigen Sie, dass dann auch $\mu^*(T(E)) = \mu^*(E)$ für alle $E \in \mathcal{P}(X)$ und A ist genau dann μ^*-messbar, wenn $T(A)$ μ^*-messbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß $\lambda_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ translationsinvariant ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt die Abbildung $T_x(y) = y + x$ die Bedingung aus (i). Folgern Sie, dass eine Vitali-Menge nicht Lebesgue-messbar sein kann.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ ein Maß, dass nur die Werte 0 oder 1 annimmt und $\mu(X) = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(X) | \mu(A) = 1\}$$

folgende Bedingungen erfüllt:

a) $A \in \mathcal{U}, A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathcal{U}$;

b) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

c) $A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{U}$ oder $A^c \in \mathcal{U}$

(ii) Sei speziell $X = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 31.01.-02.01. besprochen werden:

Im Folgenden sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring, $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das durch μ definierte, äußere Maß.

Aufgabe Ü1. Zeigen Sie, dass μ ein σ-Inhalt ist, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle monoton fallenden Folgen $(A_n) \subseteq \mathcal{R}$ mit $\cap_n A_n = \emptyset$ gilt, dass $\mu(A_n) \to 0$. Wann gilt die Umkehrung?

Aufgabe Ü2. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \in \mathcal{P}(X)$ bereits dann μ^*-messbar ist, falls

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

gilt, für alle $E \in \mathcal{R}$ mit $\mu(E) < \infty$.

Aufgabe Ü3. Zeigen Sie, dass es für jedes $E \in \mathcal{P}(X)$ ein $A \in \sigma(\mathcal{R})$ gibt, sodass $E \subseteq A$ und $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.

Aufgabe Ü4 Sei $\nu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\nu^*(B) = \begin{cases} 0, & B = \emptyset \\ 1, & B \text{ ist beschränkt} \\ \infty, & B \text{ ist unbeschränkt} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ν^* ein äußeres Maß, aber kein Maß ist. Bestimmen Sie alle ν^*-messbaren Mengen.