Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 14

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 14.02.2017

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)
(i) Zeigen Sie: Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge, dann ist f Lebesgue-messbar.

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie:
(ii) Falls $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar sind, dann ist auch $\max\{f, g\}$ $\mathcal{A}$-messbar. Außerdem ist auch $|f|$ $\mathcal{A}$-messbar.
(iii) Ist $(f_n : X \to \overline{\mathbb{R}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen, dann sind auch die Funktionen $\sup f_n$, $\inf f_n$ und $\limsup_{n\to\infty} f_n$ $\mathcal{A}$-messbar.

Aufgabe 2 (6+2+2 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei μ–integrierbare Funktionen. Zeigen Sie die folgenden drei Rechenregeln:
(i) $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ wieder μ–integrierbar und

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Hinweis: Sie müssen hier die Definition und die Intgralsätze verwenden.
(ii) Ist $f \leq g$, so ist $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
(iii) Es gilt: $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$.
Hinweis: Die Behauptungen (ii) und (iii) folgen für beliebige integrierbare Funktionen nicht sofort aus der Definition. (i) ist sehr hilfreich.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
a) Sei X eine Menge $p \in X$ und $\delta_p : \mathcal{P} \to [0, \infty]$ das zu p gehörende Dirac-Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass jede Fuktion $f : X \to \mathbb{R}$ δ_p-integrierbar ist und dass gilt:

$$\int_X f d\delta_p = f(p).$$

b) Wir betrachten das Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(N) \to [0, \infty]$ (d. h. $\mu(A) = |A|$ für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ genau dann μ-integrierbar ist, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 07.02-09.02 besprochen werden:

Aufgabe Ü 1 (a) Begründen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-messbar, dann ist für jedes $y \in \overline{\mathbb{R}}$ das Urbild $f^{-1}(y)$ eine Lebesgue-Menge.
(b) Sei $V \subset [0,1]$ eine Vitali-Menge und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in V, \\ -|x| & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus V. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für jedes $y \in \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(y)$ und begründen Sie, warum $f^{-1}(y)$ eine Lebesgue-Menge ist. Zeigen Sie, dass f nicht Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe Ü2 Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar bzw. Lebesgue-messbar? Begründen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann Borel- (bzw. Lebesgue-)messbar ist, wenn $f^{-1}([-\infty, a])$ eine Borel-(bzw. Lebesgue-)Menge ist für alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$ und dass dies wiederum genau dann der Fall ist, wenn $f^{-1}([a, \infty])$ eine Borel-(bzw. Lebesgue-)Menge ist für alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Zeigen Sie: Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abzählbar, dann ist f Borel-messbar. Schlussfolgern Sie: Ist f monoton, dann ist f Borel-messbar.

Aufgabe Ü3 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie: Falls $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar sind, dann sind auch $f \cdot g, f + g$ $\mathcal{A}$-messbar.

Aufgabe Ü4 Sei X eine nichtleere Menge, $A, B \subset X$ und $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma(A, B)$ die von A und B erzeugte σ-Algebra. Sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 2$, $\mu(B) = 3$ und $\mu(A \cap B) = 1$. Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \setminus B \\ -2, & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{anderenfalls} \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_X f d\mu$.

Aufgabe Ü5 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar und $g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar und beschränkt. Zeigen Sie, dass das Produkt $f \cdot g$ μ-integrierbar ist.