Übungsblatt 3

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 15.11.2016

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)
(i) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme in $\mathbb{R}^2$:

a) $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$

b) $x'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der folgenden homogenen linearen Differentialgleichung in $\mathbb{R}^3$:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)
(i) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^2$ an:

a) $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -5t + 2 \\ -8t - 8 \end{pmatrix}.$

b) $x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}.$

(ii) Lösen Sie die folgende imhomogene lineare Differentialgleichung höherer Ordnung in $\mathbb{R}^1$:

$$x''(t) - 4x(t) = 5\cos t + 8e^{-2t}.$$

Aufgabe 3 (3+7 Punkte)
(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konstant. Zeigen Sie: Jede Lösung $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von $x'(t) = Ax(t)$ hat genau dann konstante Norm, wenn A schiefsymmetrisch ist, d.h. $A = -A^T$.

(ii) Gesucht ist die allgemeine zweimal differenzierbare Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(t) = 2f(t) + 2tf'(t).$$

Dabei benutze man, dass man eine Lösung direkt erraten kann, nämlich $g(t) = e^{t^2}$ und für jede weitere Lösung f die sogenannte Wronski-Determinante $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$w(t) := \det \begin{pmatrix} g(t) & f(t) \\ g'(t) & f'(t) \end{pmatrix}$$

bis auf konstanten Faktor bestimmt werden kann.
Hinweis: Das auftauchende Integral von e^{-t^2} kann man nicht explizit bestimmen.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 08.11.-10.11. besprochen werden:

Aufgabe Ü1 (i) Bestimmen Sie Fundamentalsysteme der folgenden Systeme homogener linearer Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^3$:

$$a) \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x, \qquad b) \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} x.$$

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $a)$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe Ü2 (i) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 8t \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Ü3 Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von

- $x''(t) - 5x'(t) + 6x = e^{-2t}$.
- $x''(t) + x(t) = \tan t$.