Übungsblatt 4

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 22.11.2016

Aufgabe 1 (2+2+6 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$ und $xg(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die autonome Differentialgleichung 2. Ordnung in $\mathbb{R}^1$:

$$x''(t) = g(x(t)).$$

(a) Bestimmen Sie das dazu äquivalente Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in $\mathbb{R}^2$
(b) Zeigen Sie, dass $a = (0, 0)$ der einzige Gleichgewichtszustand des dynamischen Systems aus (a) ist.
(c) Zeigen Sie, dass $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(x, y) := \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x g(s)ds$$

eine Ljapunov-Funktion für dieses dynamische System zum Gleichgewichtszustand a ist.
Zeigen Sie mit Hilfe dieser Ljapunov-Funktion, dass der Gleichgewichtszustand a stabil ist.

Aufgabe 2 (4+3+3 Punkte)
Seien $X, Y : U \to \mathbb{R}^n$ glatte Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, $X = (X_1, X_2, ..., X_n), Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.
Die Lie-Klammer $[X, Y] : U \to \mathbb{R}^n$ ist dann ein glattes Vektorfeld definiert durch

$$[X, Y]_i := \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}.$$

(a) Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Vektorfelder X, Y, Z, die wenigstens zweimal differenzierbar sind:

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$$
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(b) Seien $D_1, D_2 : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ zwei Derivationen und X_1, X_2 die zugehörigen Vektorfelder. Zeigen Sie, dass dann $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 : C^\infty(U) \to C^\infty$ ebenfalls eine Derivation ist, deren zugehöriges Vektorfeld gerade $[X_1, X_2]$ ist.
(c) Seien $A, B \in M(n; \mathbb{R})$ gegeben. Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-tA}Be^{tA}.$$

sowie die Lie-Klammer der Vektorfelder X_A, X_B auf $\mathbb{R}^n$, die durch $X_A(x) := Ax$ und $X_B(x) := Bx$ gegeben sind.

Aufgabe 3 (6+4 Punkte)
Seien X, Y glatte Vektorfelder auf der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi, \Psi : V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zugehörige Abbildungen wie in Ü2 auf der Rückseite, wobei X und Y als Abbildungen $X, Y : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ interpretiert werden, die nicht von t abhängen.
(a) Zeigen Sie: für alle $x \in U$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_{\Phi_t^{-1}(x)}\Phi_t(Y(\Phi_t^{-1}(x))) = -[X, Y](x).$$

Hinweis: Benutzen Sie die Diskussion auf der Rückseite in Ü3 (b) und (c). Eine Taylorentwickung in t kann im letzten Schritt hilfreich sein.
(b) Zeigen Sie: Es gilt genau dann $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ für alle s, t, wenn $[X, Y] \equiv 0$.
$(c)^*$ Leiten Sie eine zu (b) analoge Bedingung her, falls $X, Y : U \times I \to \mathbb{R}^n$ noch von t abhängen.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 15.11.-17.11. besprochen werden:

Aufgabe Ü1. Sei $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Eine C^1-Funktion $E : U \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Erstes Integral von* X, wenn E auf dem Bild jeder Integralkurve von X konstant ist. Zeigen Sie:

- Eine C^1-Funktion $E : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann erstes Integral von X, wenn
$$\langle \mathrm{grad} E(x), X(x) \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in U.$$
- Sei $a \in U$ eine Nullstelle von X und E ein erstes Integral von X, das in a ein isoliertes Minimum hat. Dann ist $L := E - E(a)$ eine Ljapunov-Funktion von X zur Nullstelle a und a ein stabiler Punkt von X.

Aufgabe Ü2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $I_x \subset \mathbb{R}$ definiert durch $\{x\} \times I_x = (\{x\} \times \mathbb{R}^n) \cap W$ ein Intervall mit $0 \in I_x$ ist. Gegeben sei eine stetig differenzierbare Abbildung
$$\Phi : U \to \mathbb{R}^n,$$
so dass $\Phi_t := \Phi(.,t) : U_t \to \mathbb{R}^n$ mit $U_t \times \{t\} := U \cap (\mathbb{R}^n \times \{t\})$ ein C^1–Diffeomorphismus auf das Bild ist und $\Phi(x,0) = x$ für alle x mit $(x,0) \in U$. Wir definieren auf $W := \Phi^{-1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$
$$X : W \to \mathbb{R}^n$$
durch
$$X(x,t) := (\frac{\partial}{\partial t}\Phi)(\Phi_t^{-1}(x), t).$$
(a) Überzeugen Sie sich, dass $\Phi(x,.) : I_x \to U$ eine Lösung des Anfangswertproblems $f : I_x \to \mathbb{R}^n$
$$f'(t) = X(f(t),t), \quad f(0) = x, \quad (f(t),t) \in U \forall t \in I_x$$
ist.
(b) Sei $d^1_{x,t}\Phi : U \times I \to M(n;\mathbb{R})$ die Einschränkung des Differentials auf $\mathbb{R}^n$: $d^1_{x,t}\Phi(v) := d_{x,t}\Phi(v,0)$ für $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $d^1_{x,.}\Phi : I_x \to M(n;\mathbb{R})$ die Lösung der linearen(!) Differentialgleichung $\Psi'(t) = d^1_{\Phi_t(x),t}X \cdot \Psi(t)$ mit $\Psi(0) = Id$ ist.
(c) Zeigen Sie: Ist X unabhängig von t, dann gilt für alle $s,t \in I$ mit $s+t \in I$
$$\Phi^X_t(\Phi^X_s(x)) = \Phi^X_{s+t}(x).$$

Aufgabe Ü3. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $D : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ eine Derivation, d.h. eine lineare Abbildung, die die Leibnizregel erfüllt: $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ für alle $f,g \in C^\infty(U)$. Begründen Sie, dass für ein glattes (d.h. beliebig oft differenzierbares) Vektorfeld X auf U durch $f \in C^\infty(U) \mapsto X(f) \in C^\infty(U)$ eine Derivation definiert wird, wobei $X(f)(x) := d_x(f)$ ist. Zeigen Sie, dass es andererseits für jede Derivation ein eindeutig bestimmtes glattes Vektorfeld X gibt, so dass $Df = X(f)$.
Hinweis: Wenden Sie D auf die Koordinatenfunktion x_i an und benutzen Sie, was Sie über die Taylorentwicklung für einmal stetig differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher wissen.
(b) Sei $\phi : U \to V$ ein glatter Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und $D : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ eine Derivation auf U. Dann ist durch $f \in C^\infty(V) \mapsto D(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} \in C^\infty(V)$ eine Derivation auf V definiert. Sie sei mit $\phi_* D$ bezeichnet.
(c) Zeigen Sie, dass das zu $\phi_* X$ gehörende Vektorfeld durch $(\phi_* X)(x) := d_{\phi^{-1}(x)}(X(\phi^{-1}(x)))$ für $x \in V$ gegeben ist.