Übungsblatt 5

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 29.11.2016

Aufgabe 1(5+5 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Vektorfelder die kritischen Punkte und entscheiden Sie, ob diese stabil oder asymptotisch stabil sind in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $X(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ \alpha(1-x^2)y - x \end{pmatrix}$ mit $\alpha \leq 0$.

(b) $X(x,y) = \begin{pmatrix} -y - \alpha x^3 \\ x - \alpha y^3 \end{pmatrix}$.

$(c)^*$ Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind und berechnen Sie die Tangentialebenen in einem beliebigen Punkt.

a) $M_1 = \{(\cosh z \cdot \cos u, \cosh z \cdot \sin u, z) \in \mathbb{R}^3 | (u,z) \in \mathbb{R}^2\}$

b) $M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)
Beweisen Sie, dass die folgenden Teilmengen keine glatten Untermannigfaltigkeiten sind:

(a) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2\}$

(b) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 = y^2\}$
Hinweis: Angenommen es gibt eine glatte Parametrisierung $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to P \subset \mathbb{R}^2$ um $(0,0) \in P$. Berechnen Sie die Ableitungen γ', γ'' und γ''' und folgern Sie, dass nicht überall $\gamma'(t) \neq 0$ gelten kann.

$(c)^*$ Kann (b) eine einmal differenzierbare Mannigfaltigkeit sein?

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 22.11.-24.11. besprochen werden:

Aufgabe Ü1. Bestimmen Sie für das folgenden Vektorfeld die kritischen Punkte und entscheiden Sie, ob diese stabil oder asymptotisch stabil sind. Skizzieren Sie das Phasenportrait:

- $X(x,y) = \begin{pmatrix} -y\cos(x^2+y^2) - x\sin(x^2+y^2) \\ x\cos(x^2+y^2) - y\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$
- $X(x,y) = \begin{pmatrix} x - \alpha y^3 \\ -y + \alpha x^3 \end{pmatrix}$

Aufgabe Ü3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Diskutieren Sie, was dies für die lokale Topologie von M um einen Punkt $x \in M$ bedeutet. Zeigen Sie durch ein topologisches Argument, dass die Vereinigung der Koordinatenachsen $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n | x = 0 \text{ oder } y = 0\}$ in $(0,0)$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ sein kann.

Aufgabe Ü4 Zeigen Sie, dass die n-Sphäre $S^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und das für den Tangentialraum gilt:

$$T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, v\rangle = 0\}.$$

Aufgabe Ü5. Geben Sie zwei Beweise dafür, dass der Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, indem Sie Z auf folgende Weise darstellen:

a) Als Nullstellenmenge der Funktion $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$.

b) Als Vereinigung der lokalen Parametrisierungen durch Zylinderkoordinaten

$$P_{\phi_0} : (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$
$$P_{\phi_0}(\phi, z) = (\cos(\phi - \phi_0), \sin(\phi - \phi_0), z)$$

für geeignete $\phi_0 \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie jeweils die Tangentialebene in einem Punkt $p \in Z$.