Übungsblatt 8

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 3.1.2017

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass die Halbsphäre $S^n_+ := \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist. Konstruieren Sie einen Diffeomorphismus zur abgeschlossenen Einheitskugel.
(b) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $[0,\infty)^2 \subset \mathbb{R}^2$ keine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\Phi : [0,\infty)^2 \to \mathbb{H}^2$, dessen Einschränkung $\Phi|_{[0,\infty)^2\setminus\{0\}} : [0,\infty)^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.
c) Konstruieren Sie eine glatte Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sodass $\phi|_{B_1(0)} \equiv 1$ und $\phi(x) = 0$ für $|x| > 2$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert und setzen Sie

$$\phi(x) = \frac{f(2-|x|)}{f(2-|x|) + f(|x|-1)}.$$

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2 Punkte)
(a) Drücken Sie die Übergangsabbildung $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ zwischen den stereographischen Projektionen der 2–Sphäre vom Nord- bzw. Südpol mithilfe der Rechenoprationen der komplexen Zahlen aus.
(b) Sei p ein nicht konstantes, komplexes Polynom. Wir betrachten die zugehörige Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Mithilfe der stereographischen Projektion definieren wir $f : S^2 \to S^2$ durch $f(x) := p(\varphi_N(x))$ und $f(N) = N$. (N wird dabei auch als ∞ interpretiert und $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.) Zeigen Sie, dass f eine glatte Abbildung ist.
(c) Bestimmen Sie das Differential $d_x f$ für $x \neq N$ in der Karte $\varphi_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$. Hinweis: wende Beispiel (3) nach Definition 171 des Skriptes Analysis I*und II* auf das Polynom p an. Zeigen Sie, dass es nur endliche viele Punkte in S^2 gibt, für die das Differential $d_x f$ nicht surjektiv ist. Daraus folgt, dass es auch nur endliche viele Werte von solchen *kritischen* Punkten gibt.
(d) Erläutern Sie warum das Komplement von endlich vielen Punkten in S^2 wegzusammenhängend ist.
(e) Erklären Sie, wie nun aus Aufgaben Ü2 und Ü3 der Rückseite der Fundamentalsatz der Algebra folgt.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
(a) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix der erste Fundamentalform von S^2 bezüglich der stereographischen Projektion vom Nordpol aus. Bestimmen Sie die zugehörige Gramsche Determinante.
(b) Berechnen Sie die mithilfe von (a) den Flächeninhalt der 2–Sphäre.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 13.12.-15.12. besprochen werden:

Aufgabe Ü1. Sei $M \subset \mathbb{R}^K$ eine glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand und $N \subset \mathbb{R}^L$ eine glatte Untermannigfaltigkeit (ohne Rand). Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Folgt aus der Surjektivität des Differentials $d_pf : T_bM \to F_{f(p)}N$ für alle $p \in f^{-1}(q)$ für ein $q \in N$, dass $f^{-1}(q) \subset M$ eine Untermannigfaktigeit mit Rand ist? Überlegen Sie sich ein Gegenbeispiel. Welche zusätzliche Bedingung muss gelten?

Aufgabe Ü2. Zur Vorbereitung auf Aufgabe 2 zwei kleine Vorüberlegungen: Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen metrischen Räumen heißt **eigentlich**, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset N$, die Urbildmenge $f^{-1}(K) \subset M$ ebenfalls kompakt ist. Zeigen Sie für jede stetige Abbildung $f : M \to N$:
(a) Ist M kompakt, so ist f eigentlich.
(b) Ist f eigentlich, so ist für eine beliebige Teilmenge $L \subset N$ die Einschränkung $f|_{f^{-1}(L)} : f^{-1}(L) \to L$ ebenfalls eigentlich.

Aufgabe Ü3. Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten derselben Dimension, deren Differential in allen Punkten surjektiv ist. Sei N wegzusammenhängend und f eigentlich. Zeigen Sie, dass dann die Anzahl der Urbildpunkte $f^{-1}(q)$ für alle $q \in N$ unabhängig von q ist. Finden Sie Gegenbeispiele für die Aussage falls f nicht eigentlich ist. Hinweis: Der Satz über die Umkehrabbildung ist hier sehr hilfreich.