Übungsblatt 9

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 10.01.2017

Aufgabe 1 (4+3+3 Punkte)

a) Für eine stetig differenzierbare injektive Abbildung $\gamma = (r, z) : [a, b] \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$, $a < b$ definiere

$$M_\gamma = \{(r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, z(t)) \mid \theta \in [0, 2\pi); t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass M_γ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass für den Flächeninhalt gilt: $\operatorname{area}(M) = 2\pi \int_a^b r(t)\sqrt{\dot{r}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt$.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Torus, der durch die Rotation eines Kreises vom Radius $a > 0$ an einer Gerade entsteht, wobei der Abstand R des Mittelpunktes des Kreises zur Geraden größer als a ist.
c) Der Schwerpunkt einer stetig differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^m$ ist der Punkt $x_s \in \mathbb{R}^m$ mit $(x_s)_j = (\int x_j dM)/\operatorname{vol}(M)$. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbsphäre $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0\}$. Hinweis: Sie dürfen Ihr Wissen über den Flächeninhalt der Sphäre benutzen. Nutzen Sie Symmetrieeigenschaften aus.

Aufgabe 2 (2+5+3 Punkte)

Sei $f : \overline{B}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte, injektive Immersion des abgeschlossenen Einheitsballs $\overline{B}^n \subset \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist dann $M := f(\overline{B}^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand (siehe Übungsblatt 6, Aufgabe 1).
(a) Zeigen Sie dass es eine glatte Abbildung $N : \overline{B}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, mit $\|N(x)\| = 1$ und $N(x) \perp T_{f(x)}M$ für alle x. So ein N nennt man Einheitsnormalenfeld.
Hinweis: Verallgemeinern Sie die Konstruktion des Kreuz- bzw. Vektorprodukts auf $\mathbb{R}^3$ mithilfe der Determinante oder konstruieren Sie N lokal mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens. In beiden Fällen werden Informationen von f benötigt.
(b) Zeigen Sie, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $e \leq \epsilon$ die Abbildung $F : \overline{B}^n \times [-e, e] \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch $F(x, t) := f(x) + tN(x)$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Wir nennen $M_e := F(\overline{B}^n \times [-e, e]) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die e-Verdickung von M.
(c) Zeigen Sie die folgende euklidische Interpretation des Volumens von M:

$$\lim_{e \to 0} \frac{\operatorname{vol}_{n+1}(M_e)}{2e} = \int\limits_M dM.$$

Hinweis: Benutzen Sie (b) und die Transformationsformel für das Integral.

Bitte wenden...

Aufgabe 3 (6+2+2 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein kompaktes Gebiet mit zusammenhängendem, stetig differenzierbarem, zusammenhängendem Rand, d.h. insbesondere eine 2–dimensionale C^1–Untermannigfaltigkeit mit Rand. Sei $\gamma = (x, y) : [a, b] \to \partial\Omega$ eine surjektive differenzierbare Abbildung, für die $\gamma|_{[a,b)}$ auch injektiv ist. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt von Ω

$$\operatorname{area}(\Omega) = \Big| \int_a^b x(t) y'(t) dt \Big|.$$

Hinweis: Bestimmen Sie ein geeignetes Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^2$ und wenden Sie darauf den Divergenzsatz an.

b) Argumentieren Sie, dass die Behauptung in (a) auch gilt, wenn der Rand nur "stückweise stetig differenzierbar ist, d.h. γ aus (a) ist stetig und stetig differenzierbar auf Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$ mit $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, surjekitv und injaktiv auf $[a, b)$.

Hinweis: Man muss die "Ecken" des Randes abrunden/glätten und die dabei enstehenden "Fehler" auf beiden Seiten der Gleichung abschätzen. Ernstzunehmende Versuche werden honoriert.

c) Wenden Sie dann das Ergebnis auf sich nicht überschlagende Polygone an und leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt in Termen der Koordinaten der Eckpunkte her.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 03.01-05.01 besprochen werden:

Aufgabe Ü1 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph von f über dem Inneren eines Quaders Q. M ist dann eine C^1–Untermannigfaltigkeit mit endlichem Volumen.
(a) Sei f linear. Der Graph von f ist dann wieder ein n-dimensionaler euklidischer Raum und M eine Teilmenge darin Überlegen Sie sich, dass das eukidische Volumen mit dem Volumen der Mannigfaltigkeit übereinstimmt.
(b) Wir zerlegen den Würfel $Q := [0,1]^n$ in kleine Teilquader $\{Q_k\}_{k=1}^N$ und summieren die Volumina der Bilder $d_{x_k} f(Q_k)$ für beliebig gewählte $x_k \in Q_k$. Begründen Sie, dass dieser Wert für eine Folge von Zerlegungen, deren maximale Kantenlänge gegen Null konvergiert, gegen das Volumen von M strebt.
(c) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $g : V \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $M := \{(x, g(x)) : x \in V\}$. Zeigen Sie für jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$:

$$\int_M f(y)dy = \int_V f(x, g(x))\sqrt{1 + \|\nabla g(x)\|^2}dx.$$

(unter der Voraussetzung, dass das Integral existiert).

Aufgabe Ü2 Begründen Sie, dass das "Volumen" einer kompakten eindimensionalen Untermannigfaltigkeit, d.h. einer Kurve gleich der Länge dieser Kurve ist.

Aufgabe Ü3 Zeigen Sie für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty (\int_{S^{n-1}} r^{n-1} f(r\omega)d\omega)dr$$

(unter der Voraussetzung, dass das Integral existiert).

Aufgabe Ü5 Berechnen Sie das Gaußsche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ und benutzen Sie Polarkoordinaten.