Übungsblatt 9

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 10.01.2017

Aufgabe 3 (6+2+2 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein kompaktes Gebiet mit zusammenhängendem, stetig differenzierbarem, zusammenhängendem Rand, d.h. insbesondere eine 2–dimensionale C^1–Untermannigfaltigkeit mit Rand. Sei $\gamma = (x, y) : [a, b] \to \partial\Omega$ eine surjektive differenzierbare Abbildung, für die $\gamma|_{[a,b)}$ auch injektiv ist. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt von Ω

$$\text{area}(\Omega) = \Big| \int_a^b x(t)y'(t)dt \Big|.$$

Hinweis: Bestimmen Sie ein geeignetes Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^2$ und wenden Sie darauf den Divergenzsatz an.
b) Argumentieren Sie, dass die Behauptung in (a) auch gilt, wenn der Rand nur "stückweise stetig differenzierbar ist, d.h. γ aus (a) ist stetig und stetig differenzierbar auf Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$ mit $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, surjekitv und injaktiv auf $[a, b)$.
Hinweis: Man muss die "Ecken" des Randes abrunden/glätten und die dabei enstehenden "Fehler" auf beiden Seiten der Gleichung abschätzen. Ernstzunehmende Versuche werden honoriert.
c) Wenden Sie dann das Ergebnis auf sich nicht überschlagende Polygone an und leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt in Termen der Koordinaten der Eckpunkte her.

Lösung: (a) Als Vektorfeld wählen wir $X(x, y) = (x, 0)^T$. Offenbar ist $\text{div}(X) = 1$. Damit ist

$$\int_\Omega \text{div}(X)dxdy = \int_\Omega dxdy = \text{area}(\Omega).$$

Andererseits ist nach dem Divergenzsatz

$$\int_\Omega \text{div}(X)dxdy = \int_{\partial\Omega} X \cdot nd(\partial\Omega)$$

und wir müssen noch die rechte Seite mithilfe der Parametrisierung γ ausdrücken. Zunächst einmal ist offensichtlich

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = 0$$

also nach Normierung

$$n(x(t), y(t)) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

Der Nenner wird nach Vorausetzung dabei nicht null. Die Gramsche Determinante der Parametrisierung ist andererseits gleich

$$\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x'(t)^2 + (y'(t))^2$$

und somit

$$\int_{\partial\Omega} X \cdot nd(\partial\Omega) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2}} (-y'(t)x(t)) \sqrt{(x'(t)^2 + (y'(t))^2} dt$$

wobei wir benutzen, dass ein Punkt auf dem Rand eine Nullmenge bildet. Nach Kürzung der beiden Wurzelausdrücke ergibt sich die Behauptung.

(b) Unter den Voraussetzungen sieht die Umgebung eines Punktes $\gamma(t_j)$ auf dem Rand aus, wie die Ecke eines Polygons. Je nachdem, ob die Ecke konvex oder konkav ist, kann man durch Abschneiden oder Hinzufügen eines beliebig kleinen Gebietstckes die Ecke "abrunden". Die Flächeninhalte unterscheiden sich nur um einen beliebig kleinen Betrag ("für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine "Abrundung", so dass die Summe der Flächeninhalte der hinzugefügten oder abgeschnittenen Stcke kleiner als ϵ ist"). Ähnlich verhält es sich mit dem Integral über dem Rand: die Längen der (rektifizierbaren) Kurvenstücke, die die Ränder der kleinen Gebietsstücke bilden, sind beliebig klein; die Integrale von $x(t)y'(t)$ über diesen sind vom Betrag her kleiner als ein Vielfaches diese Längen, wobei diese Konstante durch das Maximum von $\frac{|x(t)y'(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}} \leq 2\max\{|x| \mid (x,y) \text{ ist ein Eckpunkt } \}$ gegeben ist, wie die folgende kleine Rechnung für das Intergral über ein differenzierbares Randstück $\gamma : [a,b] \to \partial\Omega$ zeigt:

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_a^b x(t)y'(t)dt\Big| &\leq \int_a^b \frac{|x(t)y'(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt \\
&\leq \max\{\frac{|x(t)y'(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}} \mid t \in [a,b]\} \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt \\
&\leq \max\{\frac{|x(t)y'(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}} \mid t \in [a,b]\}\text{length}(\gamma).
\end{aligned}
$$

Für die drei beteiligten Kurvenstücke beim Abschneiden oder Hinzufügen der Ecken ist das Maximum in den letzten beiden Zeilen durch den obigen Ausdruck beschränkt, wenn das in einer kleinen Ungebung des Eckpunktes geschieht.

Wenn Sie jetzt noch ein Bild dazu anfertigen, ist die Lösung akzeptabel.

(c) Seien $P_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ die Ecken eines sich nicht überschlagenen Polygons Ω mit N Ecken $(k = 0, ..., N-1)$, $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die affine Parametrisierung der Strecke:

$$\gamma(t) = (1-t)P_k + tP_{k+1} = ((1-t)x_k + tx_{k+1}, (1-t)y_k + ty_{k+1} = (x(t), y(t))$$

wobei $P_N = P_0$. Dann ist $y'(t) = y_{k+1} - y_k$. Da das Randintegral nicht von der (differenzierbaren) Parametrsierung der Strecken abhängt folgt

$$
\begin{aligned}
\text{area}(\Omega) &= \Big|\sum_{k=0}^{N}\int_0^1 ((1-t)x_k + tx_{k+1})(y_{k+1} - y_k)dt\Big| \\
&= \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{N}(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)\Big|.
\end{aligned}
$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 03.01-05.01 besprochen werden:

Aufgabe Ü1 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph von f über dem Inneren eines Quaders Q. M ist dann eine C^1–Untermannigfaltigkeit mit endlichem Volumen.
(a) Sei f linear. Der Graph von f ist dann wieder ein n-dimensionaler euklidischer Raum und M eine Teilmenge darin Überlegen Sie sich, dass das eukidische Volumen mit dem Volumen der Mannigfaltigkeit übereinstimmt.
(b) Wir zerlegen den Würfel $Q := [0,1]^n$ in kleine Teilquader $\{Q_k\}_{k=1}^N$ und summieren die Volumina der Bilder $d_{x_k} f(Q_k)$ für beliebig gewählte $x_k \in Q_k$. Begründen Sie, dass dieser Wert für eine Folge von Zerlegungen, deren maximale Kantenlänge gegen Null konvergiert, gegen das Volumen von M strebt.
(c) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $g : V \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $M := \{(x, g(x)) : x \in V\}$. Zeigen Sie für jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$:

$$\int_M f(y)dy = \int_V f(x, g(x))\sqrt{1 + \|\nabla g(x)\|^2}dx.$$

(unter der Voraussetzung, dass das Integral existiert).

Aufgabe Ü2 Begründen Sie, dass das "Volumen" einer kompakten eindimensionalen Untermannigfaltigkeit, d.h. einer Kurve gleich der Länge dieser Kurve ist.

Aufgabe Ü3 Zeigen Sie für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty (\int_{S^{n-1}} r^{n-1} f(r\omega)d\omega)dr$$

(unter der Voraussetzung, dass das Integral existiert).

Aufgabe Ü5 Berechnen Sie das Gaußsche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ und benutzen Sie Polarkoordinaten.