Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 17.11.2003

Aufgabe 1
(a) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad \Leftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird.
(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung $\phi : [(m,n)] \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_\sim \mapsto m - n \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert ist.
(c) Zeigen Sie, dass ϕ eine bijektive Abbildung ist.

1 P

Aufgabe 2
Sei M eine beliebige Menge mit unendlich vielen Elementen. Sei $x \in M$ ein Element dieser Menge. Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung

$$f : M \setminus \{x\} \longrightarrow M.$$

1 P

Aufgabe 3
Welchen Rest läßt die Potenz 2^{2003} bei der Division durch $7, 9$ bzw. 11?

1 P

Aufgabe 4
Wie "macht" man eine Abbildung injektiv?
Sei $f : X \to Y$ irgend eine Abbildung. Durch

$$x_1 \sim x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Die Abbildung f faktorisiert zu einer Abbildung $\overline{f} : X/_\sim \to Y$. Überlegen Sie für sich selbst, warum dies so ist.
(1) Zeigen Sie, dass $\overline{f}$ injektiv ist.
(2) Sei $f = F \circ P$, für Abbildungen $P : X \to Z$ und $F : Z \to Y$. F sei injektiv. Zeigen Sie, dass es dann eine Abbildung $\phi_Z : X/_\sim \to Z$ gibt, so dass

$$\phi_Z \circ p = P$$
$$\overline{f} = F \circ \phi_Z$$

sind. Zeichnen Sie das zugehörige kommutative Diagramm.
(3) Beweisen Sie, dass die in (2) konstruierte Abbildung injektiv ist (auch wenn Sie nicht in der Lage waren, sie zu konstruieren).
Hinweis: Benutzen sie für (2) und (3) auch (1) und die Surjektivität der Projektion $p : X \to X/_\sim$.

1 P

Insgesamt: **4 P**