Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 8.12.2003

Aufgabe 1
(1) A sei eine Matrix mit ganzen Zahlen, A_p die Matrix der Restklassen der Einträge von A modulo einer Primzahl p. Zeigen Sie, dass dann für die Ränge

$$rgA_p \leq rgA$$

gilt.
(2) Sei $\mathcal{L} \subset \mathbb{Q}^n$ die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in n Unbekannten und mit ganzzahligen Koeffizienten. Wir betrachten dieses Gleichungssystem in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, wobei wir die ganzzahligen Koeffizienten wieder durch ihre Restklassen modulo p ersetzen und dessen Lösungsmenge $\mathcal{L}_p \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. In welcher Beziehung stehen die Lösbarkeit der beiden Systeme sowie $\dim(\mathcal{L})$ und $\dim(\mathcal{L}_p)$ zueinander? Benutzen Sie (1) oder gegebenenfalls einfache Beispiele für die Begründung Ihrer Antwort.
Hinweis: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ habe ich in der Vorlesung mit $\mathbb{Z}_p$ bezeichnet. Die erste Bezeichnung ist die üblichere und wird fortan immer verwendet.

1 P

Aufgabe 2
Füllen Sie folgendes magische Quadrat mit den (ganzen) Zahlen eins bis acht auf, so dass die Zeilen, Spalten und Diagonalen aufsummiert jeweils 15 ergeben. Jede Zahl soll dabei nur einmal benutzt werden.

		9

Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf. Von wievielen Parametern hängt dessen allgemeine Lösung ab? Gibt es Einträge, die unabhängig von den Parametern sind? Wählen Sie die Parameter so, dass sich eine Lösung des Problems ergibt. Finden Sie alle solchen Parameter.
Hinweis: Aufgrund der aktuellen Ereignisse haben Sie vielleicht nicht soviel Zeit, ein so großes lineares Gleichungssystem zu lösen, auf das Sie ohne vorherige Überlegungen stoßen werden. Reduzieren Sie also erst die Zahl der Variablen und Gleichungen. Das Internet ist hier hilfreich, z.B. http://www.mathe.tu-freiberg.de/ hebisch/cafe/magisch.html!!

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 3

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit der Addition und Multiplikation modulo 4 ist **kein** Körper. Gibt es einen Körper mit 4 Elementen?

Hinweis: Welche Charakteristik müsste ein solcher Körper haben? Stellen Sie die Tabellen für die Addition und die Multiplikation auf. Ignorieren Sie dabei zunächst die Assoziativität und Distributivität und überlegen Sie, wie sich alle anderen Axiome in den Tabellen manifestieren. Die Aussagen aus der Vorlseung über endliche Körper helfen Ihnen dabei. Vergessen Sie nicht, Assoziativität und Distributivität am Ende zu überprüfen!

1 P

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Auf der Menge $R := \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ seien die folgenden binären Operation $+$ und $\cdot$ gegeben: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ und $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$.

(1) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

(2) Untersuchen Sie für die folgenden Körper $\mathbb{K}$, ob $(R, +, \cdot)$ ein Körper ist: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Hinweis: Versuchen Sie, die $\cdot$ –Inversen zu bestimmen. Finden Sie die dafür notwendige Bedingung an $\mathbb{K}$.

1 P

Insgesamt: **4 P**

Die Zwischenklausur wird auf Mitte Januar verschoben. Am Sonnabend, den 13.12. von 10-13 Uhr finden zwei Vorlesungen in Linearer Algebra statt!!