Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 05.01.2004

Aufgabe 1

a) Sei A eine $m \times n$ - Matrix und B eine $n \times k$ - Matrix. Beweisen Sie:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

b) Finden Sie alle $n \times n$ Matrizen, die mit allen anderen $n \times n$ Matrizen kommutieren.

1 P

Aufgabe 2
Berechnen Sie alle Potenzen der $n \times n$ - Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

1 P

Aufgabe 3

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 - Matrix mit Einträgen a, b, c, d aus einem kommutativen Ring R. Finden Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Invertierbarkeit von A und berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, falls diese Bedingung erfüllt ist.

b) Eine Nachricht wird folgendermassen verschlüsselt:
Die Buchstaben A, B, C, $\cdots$, Z werden auf die Restklassen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{25}$ abgebildet und $\overline{26}$ entspricht einer Leerstelle. Die entstandenen Restklassen werden als Folge von Paaren angeordnet. Die Funktion

$$f : (\mathbb{Z}/(27\mathbb{Z}))^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}/(27\mathbb{Z}))^2, \quad f(x,y) = (\overline{8}x + y + \overline{2}, x + \overline{4}y + \overline{1})$$

bildet diese Paare auf neue Paare ab. Anschliessend werden die Restklassen wieder wie oben mit Buchstaben identifiziert, und man erhält die verschlüsselte Nachricht.
Entschlüsseln Sie folgenden Text:
FUNQGBUMTKZOZEXJYK

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{H}$ die Menge aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{H}$ ist mit der Addition und Multiplikation von Matrizen ein Ring.

b) Jede Matrix in $\mathbb{H} \setminus \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ besitzt eine Inverse in $\mathbb{H}$. Die Multiplikation zweier Elemente aus $\mathbb{H}$ ist jedoch nicht unbedingt kommutativ.
(**Bemerkung:** Solche Strukturen heissen *Schiefkörper*).

c) Jedes Element aus $\mathbb{H}$ lässt sich eindeutig als Summe $aE + bI + cJ + dK$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.
(**Bemerkung:** $\mathbb{H}$ nennt man auch *Quaternionen*).

1 P

Insgesamt: **4 P**