Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 12.01.2004

Aufgabe 1
Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie, sofern die Ausdrücke erklärt sind:
$5C - 2F$, AB, BC, CB, AD, $A^T D$, $(CB)^T$, $(AB)G$, $A(BG)$.

b) Eine Matrix $X \in M(n; R)$ heißt *symmetrisch*, falls $X^T = X$. Geben Sie alle symmetrischen Matrizen $X \in M(2; \mathbb{R})$ an, für die gilt: $X^2 = G$.

c) Welche der Matrizen sind invertierbar? Bestimmen Sie im Falle der Existenz die jeweiligen Inversen.

1 P

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe M bilden. Geben Sie die Verknüpfungstabelle an. Ist M abelsch?

b) Um welche geometrischen Abbildungen handelt es sich bei diesen Matrizen? Wie ließe sich in a) die Verknüpfungstabelle und die Gruppeneigenschaften mithilfe dieser geometrischen Interpretation begründen?

1 P

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $AX = B$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Matrizen X mit $XC = CX$.

Aufgabe 4

Für $A \in M(n;\mathbb{R})$ sei $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. (Solche Matrizen nennt man *nilpotent.*) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}_n - A$ invertierbar ist und dass die Inverse durch

$$(\mathbb{E}_n - A)^{-1} = \mathbb{E}_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$$

bestimmt ist.

1 P

Insgesamt: **4 P**