Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 26.01.2004

Aufgabe 1
(van der Monde–Determinante) Seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ Elemente eines Körpers. Wir bezeichnen mit $\Delta_n(a_1, \ldots, a_n)$ die folgende Determinante:

$$\Delta_n(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & & & \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß

$$\Delta_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

(Hinweis: $\Delta_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ ist ein Polynom in x. Welchen Grad hat dieses Polynom? Welche Nullstellen besitzt es? Was ist der Koeffizient von x^{n-1}?)

1 P

Aufgabe 2
Seien m und p natürliche Zahlen. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \ldots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \ldots & \binom{m+1}{p} \\ \ldots & & & \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \ldots & \binom{m+p}{p} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Binomialkoeffizienten sind definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Danei ist $k! = 1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k$ für eine narürliche Zahl k mit der Vereinbarung, daß $0! = 1$.

1 P

Aufgabe 3
Seien $A, B \in M(m \times n, \mathbb{R})$ mit $m > n$. Zeigen sie, dass dann immer $\det(A \cdot B^T) = 0$ gilt. B^T ist die transponierte Matrix von B.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Bestimmen Sie, welche der folgenden Teilmengen V des Vektorraums $M(n,\mathbb{R})$ ein Untervektorraum sind und begründen Sie dies:

a) $V = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ (symmetrische Matrizen),

b) $V = Gl(n,\mathbb{R})$ (invertierbare Matrizen),

und für den Fall $n = 2m$:

c) $V = \{A \in M(2m,\mathbb{R}) \mid A \cdot J = J \cdot A\}$ mit $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

d) $V = \{A \in M(2m,\mathbb{R}) \mid tr(A \cdot I_{m,m} \cdot A^T) = 0\}$ mit $I_{m,m} = \left(\begin{smallmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_m \end{smallmatrix}\right)$. Dabei bezeichnet $tr(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}$ die Spur (engl. *trace*) einer Matrix $B = (b_{ij}) \in M(n,\mathbb{R})$.

1 P

Insgesamt: **4 P**