Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 02.02.2004

Aufgabe 1

Sei $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ eine 1-parametrige Schar von Matrizen $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, deren Einträge $a_{ij}(t)$ differenzierbare Funktionen seien. Man begründe, dass dann auch $\det(A(t))$ differenzierbar ist und leite folgende Formel für die Ableitung her:

$$\tfrac{d}{dt} \det \big(A(t)\big) = tr\big(\tfrac{d}{dt} A(t) \cdot A^{\#}\big)$$

Dabei bezeichnet $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ die Spur (engl. *trace*) einer Matrix $B \in M(n, \mathbb{R})$ und $A^{\#}$ ist die zu A komplementäre Matrix wie in der Vorlesung definiert.

1 P

Aufgabe 2

(a) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum des $\mathbb{K}$–Vektorraumes V. Zeigen Sie dass die natürliche Projektion $\pi : V \to V/U$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist.
(b) Sei $\varphi : V \to W$ eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{K}$–Vektorräumen V und W. Konstruieren Sie eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $\psi : V/Ker\phi \to W$ derart, dass $\psi \circ \pi = \varphi$ ist. Zeigen Sie, dass ψ injektiv ist.

1 P

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Familie $(\sin(mx), \cos(nx))_{m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ linear unabhängig in $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.
(b) Liegt die konstante Funktion $f(x) = 1$ im davon aufgespannten Unterraum?

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Der Unterraum $W \subset \mathbb{R}^5$ sei durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Bestimmen Sie eine Basis von W! Entscheiden Sie, ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in W liegen. Ist dies der Fall, geben Sie die Koordinaten bzgl. der von Ihnen gefundenen Basis an.

1 P

Insgesamt: **4 P**

Am 14. Februar, findet von 10–13 Uhr die Klausur im Schrödinger-Zentrum, in den Hörsälen 0'110 und 0'115 statt. Falls Sie verhindert sein sollten, bitte ich Sie, mir dies spätestens bis zum 20. Februar schriftlich mitzuteilen, mit der Angabe von Gründen sowie gegebenfalls einem Nachweis (wie Krankschreibung usw.).