Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 09.02.2004

Aufgabe 1
$\mathcal{B} := ((1,-1,2),(2,3,7),(2,3,6))$ und $\mathcal{B}' := ((1,2,2),(-1,3,3),(-2,7,6))$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$.
(a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$.
Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, der bezüglich $\mathcal{B}$ die Koordinaten $(2,9,-8)$ besitzt.
(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}'$.

1 P

Aufgabe 2
Seien V, W $\mathbb{R}$–Vektorräume mit den Basen $\mathcal{B}_V = (v_1, ..., v_4)$ bzw. $\mathcal{B}_W = (w_1, ..., w_5)$. Sei weiterhin $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, deren Matrixdarstellung bzgl. dieser Basen die folgende Gestalt hat:

$$M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

schließlich seien die Mengen von Vektoren $\mathcal{B}'_V := (v'_1, ..., v'_4)$ mit $v'_1 = v_1 + v_2, v'_2 = v_2 + v_3, v'_3 = v_3 + v_4, v'_4 = v_4$ sowie $\mathcal{B}'_W := (w'_1, ..., w'_5)$ mit $w'_1 = w_2, w'_2 = w_1 + w_2, w'_3 = -w_1 + w_3, w'_4 = w_1 + w_4, w'_5 = w_1 + w_5$ in V bzw. W gegeben.
(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}'_V$ und $\mathcal{B}'_W$ Basen von V bzw.W sind.
(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellungen $M^{\mathcal{B}'_V}_{\mathcal{B}_W}(F)$, $M^{\mathcal{B}'_V}_{\mathcal{B}'_W}(F)$, $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}'_W}(F)$ von F.
(c) Bestimmen Sie eine Basis vom Urbild $F^{-1}(span(w_1, w_2, w_3))$.

1 P

Aufgabe 3
Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine lineare Abbildung (Endomorphismus) $P : V \to V$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$. Sei eine solche Projektion gegeben.
(a) Zeigen Sie, dass V isomorph zur direkten Summe von Bild und Kern von P ist:

$$V \cong im(P) \oplus ker(P).$$

(b) Zeigen Sie, dass $(id_V - P)$ ebenfalls eine Projektion ist.
(c) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, die sich durch Ergänzung einer Basis von $ker(P)$ ergibt. Beschreiben Sie die Matrixdarstellung von P bezüglich dieser Basis: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(P)$. Der Einfachheit halber dürfen Sie hier $\dim(V) < \infty$ voraussetzen.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Zeigen Sie für alle Matrizen $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $B \in M(n,p,\mathbb{K})$, die folgende Ungleichung für den Rang:

$$rg(AB) \leq \min\left(rg(A), rg(B)\right).$$

1 P

Insgesamt: **4 P**

Am 14. Februar, findet von 10–13 Uhr die Klausur im Schrödinger-Zentrum, in den Hörsälen 0'110 und 0'115 statt. Falls Sie verhindert sein sollten, bitte ich Sie, mir dies spätestens bis zum 20. Februar schriftlich mitzuteilen, mit der Angabe von Gründen sowie gegebenfalls einem Nachweis (wie Krankschreibung usw.).