Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 13

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe 16.02.2004

Aufgabe 1
(1) Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.
(3) Bestimmen Sie die Matrix, die die Koordinatentransformation von der Standardbasis zur Basis aus den Eigenvektoren beschreibt, sowie deren Inverses.
(4) Berechnen Sie A^k für $k \in \mathbb{N}$.

1 P

Aufgabe 2
Gegeben seien zwei Unterräume $V, W \subset U$ eines endlich–dimensionalen Vektorraumes U. (1) Beweisen Sie die folgende Formel für die Dimensionen:

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

(2) Welche notwendige Bedingung an V, W muß gelten, damit es eine lineare Abbildung $\varphi : U \to U$ gibt mit $Ker(\varphi) = V$ und $Im(\varphi) = W$? Zeigen Sie, dass diese auch hinreichend ist, d.h. konstruieren Sie in diesem Fall eine solche Abbildung.

1 P

Aufgabe 3
Seien $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ und $B \in M(n, m; \mathbb{K})$ zwei Matrizen. Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert der zur Matrix AB gehörenden linearen Abbildung von $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ so ist λ auch ein Eigenwert, der zur Matrix BA gehörenden Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Man bestimme invertierbare Matrizen $S \in GL(5;\mathbb{R})$ bzw. $T \in GL(4;\mathbb{R})$ derart, dass

$$SAT^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{E} \in M(r, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix der Dimension $r = rg(A)$ ist. Die Matrix $A \in M(5,4;\mathbb{R})$ ist dabei gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1 P

Insgesamt: **4 P**

Am 14. Februar, findet von 10–13 Uhr die Klausur im Schrödinger-Zentrum, in den Hörsälen 0'110 und 0'115 statt. Falls Sie verhindert sein sollten, bitte ich Sie, mir dies spätestens bis zum 20. Februar schriftlich mitzuteilen, mit der Angabe von Gründen sowie gegebenfalls einem Nachweis (wie Krankschreibung usw.).