Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Ferienblatt

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Abgabe: Beginn Sommersemester (freiwillig)

Aufgabe 1
Berechnen Sie die Anzahl $N(p,n)$ der möglichen Basen in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, für eine beliebige Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $n!$ $N(p,n)$ teilt. (Versuchen Sie einmal, diesen Sachverhalt *ohne* die Interpretation der Zahl $N(p,n)$ zu beweisen!

Aufgabe 2
Die Maus im Keller
Eine Maus ist im Keller unterwegs, der aus drei Räumen besteht, die im Dreieck angeordnet sind. Die Maus wechselt jede Nacht den Raum. Sie geht dabei mit Wahrscheinlichkeit 1/3 entgegen und mit 2/3 mit dem Uhrzeigersinn. Berechnen Sie für jeden der Räume die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich die Maus in diesem am 100. Tag aufhält.

Aufgabe 3
Unentschieden!
Bei einem Fußballspiel gibt es zwei Elfmeter, einen in der 31. und einen in der 85. Minute, die erfolgreich verwandelt werden. Das Spiel endet "Unentschieden" mit 1 : 1. Zeigen Sie, dass mindestens zwei Punkte der Oberfläche Balles (der die ganze Zeit im Einsatz war) in der Zeit des Spieles am selben Ort gelegen haben.
Hinweis: (1) Von welchem Punkt aus fanden die beiden Elfmeter statt? Wo befand sich dabei der Mittelpunkt des Balles?
(2) Wir werden im nächsten Semester sehen, dass jede Bewegung des Balles, die den Mittelpunkt fest lässt, eine Drehachse besitzt. Versuchen Sie einmal, dies zu zeigen. Für unsere Zwecke genügt es einzusehen, dass sie einen positiven reellen Eigenwert hat. Warum?
(3) Zeigen Sie dafür zunächst, dass jede invertierbare lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ einen reellen Eigenwert besitzt. O.B.d.A sei $(1,0,0)$ der zugehörige Eigenvektor.
(4) Angenommen der Eigenwert ist negativ. Zeigen Sie in diesem Fall, dass der Minor A_{11} eine negative Determinante hat. Dafür benötigen Sie die Stetigkeit von $\det : M(3;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
(5) Zeigen Sie schließlich, dass jede Abbildung $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit negativer Determminante zwei reelle Eigenwerte besitzt: einen positiven und einen negativen.
(6) Folgern Sie daraus die Behauptung.

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Eine Studentin machte uns auf den folgenden interessanten Sachverhalt aufmerksam: Sei R ein beliebiger Ring mit Eins, $x, y \in R$ Elemente. Dann ist $(1 - xy) \in R$ invertierbar genau dann, wenn $(1 - yx) \in R$ invertierbar ist.

Aufgabe 5
Betrachten Sie die rekursive Folge: $(a_n)_n \subset \mathbb{N}$, die gegeben ist durch $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ sowie

$$a_{n+3} = a_{n+1} + a_n.$$

Sei $(b_n)_n \subset \mathbb{N}$ die Folge der Reste, die man bei Division von a_n durch n erhält. Berechnen Sie die ersten 20 Folgenglieder von a_n und b_n. Für welche n ist $b_n = 0$? Zeigen Sie eine entsprechende Behauptung. Gilt auch die Umkehrung?
Hinweis: Testen Sie die Umkehrung bis ca. $n = 300.000$...