Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Klausur

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

14.02.2004

Name:

Matrikelnummer:

	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
$\sum$	

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt. Für die Aufgabe 5 müssen Sie das Aufgabenblatt verwenden. Beschriften Sie jedes dieser Blätter mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer. Heften Sie das Deckblatt, das Aufgabenblatt und die Blätter mit Ihren Lösungen am Ende zusammen. Bitte schreiben Sie so, dass wir es lesen können. Ergebnisse ohne erkennbare Lösungswege können leider nicht gewertet werden (mit Ausnahme der Aufgabe 5).

Aufgabe 1
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10 & 21 \\ -1 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

5 P

Aufgabe 2
Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_4, x_2 + x_4, x_1 + x_2 + 2x_4).$$

(a) Ist φ injektiv bzw. surjektiv?

(b) Geben Sie $Ker(\varphi)$ an! Bestimmen Sie eine Basis vom Bild $Im(\varphi)$

(c) Bestimmen Sie die zu φ gehörende Matrixdarstellung bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^4$ bzw.

$$\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^3$

7 P

Aufgabe 3
Im Vektorraum der quadratischen Polynome mit reellen Koeffizienten seien die Familien

$$\mathcal{B}_1 = (x + 1, x^2 + 1, x^2 + x) \tag{1}$$
$$\mathcal{B}_2 = (3x + 3, 2x^2 + x + 1, 2x^2 + x - 1) \tag{2}$$

gegeben.
(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen sind.
(ii) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des Polynoms $-4x^2 + 4x + 10$ bezüglich jeder dieser beiden Basen.

5 P

Aufgabe 4
Sei $N \in M(n; \mathbb{K})$ eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft $N^m \neq 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, während $N^{m+1} = 0$ ist. Zeigen Sie, dass die Matrizen $\mathbb{E}_n, N, N^2, ..., N^m$ linear unabhängig im Vektorraum der Matrizen $M(n, \mathbb{K})$ sind.

3 P

Aufgabe 5
Kreuzen Sie die zutreffenden Antworten an. Es sind mehrere Antworten möglich. Ein falsch gesetztes Kreuz wirkt sich mit 0, 5 Punkten negativ auf die Wertung dieser Aufgabe aus. Es gibt jedoch nicht weniger als 0 Punkte.
a) Welche der folgenden Bedingungen ist eine korrekte Definition für die Aussage: "Der Vektorraum V wird von den Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erzeugt"?
◯ Jede Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ gehört zu V.
◯ Jedes Element von V ist Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.
◯ dim V=n.
b) Welche der Aussagen ist gleichbedeutend mit "linearer Unabhängigkeit des n-Tupels $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren aus V" ?
◯ $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ nur wenn $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
◯ Wenn $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, so $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.
◯ $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ für alle $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
c) $V \overset{L_1}{\to} W \overset{L_2}{\to} V$ seien lineare Abbildungen mit $L_2 \circ L_1 = Id_V$. Welche Aussagen sind dann richtig?
◯ $\dim W \geq \dim V$, L_1 injektiv, L_2 surjektiv
◯ $\dim W \leq \dim V$, L_2 injektiv, L_1 surjektiv
◯ $\dim W = \dim V$, L_1 bijektiv
d) Sei K ein Körper mit 4 Elementen, $f : K^2 \to K^2$ eine lineare Abbildung. Aus wie vielen Elementen kann $ker f$ bestehen?
◯ 1 Element
◯ 2 Elemente
◯ 4 Elemente
◯ 8 Elemente
◯ 16 Elemente
e) $\varphi : V \to W$ sei eine lineare Abbildung zwischen endlich–dimensionalen Vektorräumen. Aus welcher der folgenden Aussagen folgt die Injektivität von φ?
◯ $Ker\varphi = \{0\}$
◯ $\dim V = \dim Im(\varphi)$
◯ $\dim V \leq \dim W$
◯ $\varphi(V) = W$
◯ $\dim V = \dim W$ und $\varphi(V) = W$

5 P

Aufgabe 6
(a) Sei $P \in M(n; \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix mit $P^2 = P$ (eine *Projektion*). Zeigen Sie, dass $\det P \in \{0; 1\}$. Bestimmen Sie alle Projektionen P, mit $\det P = 1$.
(b) Sei $I \in M(n; \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix mit $I^2 = \mathbb{E}_n$ (eine *Involution*). Zeigen Sie, dass $\det I \in \{-1; +1\}$. Zeigen Sie weiterhin, dass $P_+ := \frac{1}{2}(\mathbb{E}_n - I)$ und $P_- := \frac{1}{2}(\mathbb{E}_n + I)$ Projektionen sind.
(c) Sei $J \in M(n; \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix mit $J^2 = -\mathbb{E}_n$ (eine *komplexe Struktur*). Zeigen Sie, dass n notwendig gerade ist, und dass weiterhin $\det J = 1$.

5 P

Insgesamt: **30 P**