Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Musterlösungen zur Probeklausur

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

Aufgabe 1
Welche Bedingungen müssen die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit das folgende lineare Gleichungssystem lösbar ist? Bestimmen Sie *alle* Lösungen!

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 3 \\ ax & + & by & & & = & c. \end{array}$$

5 P

Lösung:
Wende den Gauss-Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem an:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ a & b & 0 & | & c \end{array}$$

Von der dritten Zeile a mal die erste Zeile abziehen führt zu:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & b-a & -a & | & c-a \end{array}$$

Von der dritten Zeile (b-a) mal die zweite Zeile abziehen führt zu:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & a-2b & | & c-3b+2a \end{array}$$

Nun muss man eine Fallunterscheidung machen:

1. Fall: $a - 2b \neq 0$. Dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, und die Lösung ist

$$\begin{aligned} z &= \frac{c-3b+2a}{a-2b}, \\ y &= 3-2z = -\frac{2c+a}{a-2b} \quad \text{und} \\ x &= -2+z = \frac{b+c}{a-2b} \quad . \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge in diesem Fall

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{a-2b} \begin{pmatrix} b+c \\ -a-2c \\ 2a-3b+c \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Fall: $a - 2b = 0$ und $c - 3b + 2a \neq 0$. In diesem Fall steht in der letzten Zeile

$$0 = c - 3b + 2a \quad (\neq 0).$$

Es gibt also keine Lösung, die Lösungsmenge ist leer:

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

3. Fall: $a - 2b = 0$ und $c - 3b + 2a = 0$, also $a = 2b$ und $c = -b$. Hier kann man zum Beispiel z frei wählen, und erhält dann x und y in Abhängigkeit von z:

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2z \quad \text{ und} \\ x &= -2 + z. \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge eine Gerade:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, | x = -2 + z, y = 3 - 2z, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2
Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

mit Einträgen aus den Körpern $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Für welche a im jeweiligen Körper ist diese Matrix invertierbar? Berechnen Sie in diesen Fällen die inverse Matrix!

5 P

Lösung: Man berechnet mit der Sarrous-Formel

$$det \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = a^2 + 1.$$

A ist invertierbar genau dann, wenn $detA \neq 0$, also im Fall
$\mathbb{R}$ stets wegen $a^2 + 1 \geq 1 > 0$,
$\mathbb{C}$ falls $a \neq \pm i$,
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ falls $a \neq 2, 3$ ($a^2 + 1$ berechnen für alle fünf Reste).

Am einfachsten berechnet man die Inverse hier wegen der einfachen Struktur von A mit Hilfe der komplementären Matrix (die Determinante haben wir ja schon berechnet, und die 2x2 - Minoren sind extrem einfach) und erhält

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a^2 + 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Alternativ liefert natürlich auch der Gauss-Algorithmus diese Matrix.

Aufgabe 3
Sei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n; \mathbb{K})$$

eine sogenannte Matrix in oberer Dreiecksform.
(a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge der Matrizen von oberer Dreiecksform ein Unterring des Ringes der (quadratischen) Matrizen ist!
(b) Welche dieser Matrizen sind invertierbar? Ist das Inverse (falls es existiert) wieder eine Matrix in Dreiecksform? Begründen Sie Ihre Antworten!
(c) Begründen Sie unter Verwendung von (a) und (b), dass die Teilmenge der invertierbaren Matrizen in oberer Dreiecksform eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren Matrizen ist.

5 P

Lösungen: Bezeichne die Menge der Matrizen von oberer Dreiecksgestalt mit

$$\Delta := \left\{ (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\}_{a_{ij} \in \mathbb{K}}$$

a) $(\Delta, +, \cdot) \subset (M(n, \mathbb{K}), +, \cdot)$ ist ein Unterring, d.h.

(i) $(\Delta, +) \subset (M(n, \mathbb{K}), +)$ ist eine Untergruppe.

(ii) Δ ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation.

Zu (i): Eine Teilmenge H einer Gruppe $(G, *)$ ist eine Untergruppe, falls $H \neq \emptyset$, und für $g, h \in H$ auch $g * h, g^{-1} \in H$. Mit $H = \Delta$, $G = M(n, \mathbb{K})$ und $* = +$ ist hier also zu zeigen: $\Delta \neq \emptyset$ sowie

$$A, B \in \Delta \quad \Rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \in \Delta$$

$$\text{und} \qquad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} \in \Delta$$

Dies ist jedoch offensichtlich.

Zu (ii): Sei $A, B \in \Delta$. Z.z. $A \cdot B \in \Delta$:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{i \leq k \leq j} a_{ik} b_{kj}$$

da nach Voraussetzung $a_{ik} = 0$ für $i > k$ und $b_{kj} = 0$ für $k > j$. Ist nun aber $i > j$, so folgt $(A \cdot B)_{ij} = 0$ und deshalb $A \cdot B \in \Delta$.

b) (i) Welche $A \in \Delta$ sind invertierbare Matrizen?

(ii) Ist das Inverse einer solchen Matrix wieder in Δ?

Zu (i): $A \in M(n, \mathbb{K})$ ist invertierbar g.d.w. $\det(A) \neq 0$, da $\mathbb{K}$ als Körper vorausgesetzt war. Andererseits gilt für Dreiecksmatrizen $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zusammen ergibt das: $A \in \Delta \cap Gl(n, \mathbb{K}) \;\Leftrightarrow\; a_{ii} \neq 0 \;\forall i$.

Zu (ii): Sei $A \in \Delta \cap Gl(n, \mathbb{K})$ (d.h. $a_{ii} \neq 0$). Wir behaupten $A^{-1} \in \Delta$.

1.Möglichkeit: Berechne A^{-1} mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Im ersten Schritt normiert man:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & * & \frac{1}{a_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{array}\right)$$

Jetzt müssen links noch die Einträge über den Pivotelementen eliminiert werden. Dabei wird ein Vielfaches der i-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert, wobei $i > j$. Dies erhält rechts die obere Dreiecksgestalt. Oder anders gesagt, entsprechen diese Zeilenoperationen gerade der Multiplikation mit Elementarmatrizen von der Form

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & \text{i-te Spalte} & \\ & & & \downarrow & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} \ddots & & & & \\ & 1 & \cdots & \lambda & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{j-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Für $i > j$ ist aber $E_{ij}(\lambda) \in \Delta$ und aus a) wissen wir bereits, dass Δ abgeschlossen ist unter Multiplikation. Also ist $A^{-1} \in \Delta$.

2.Möglichkeit: Berechne A^{-1} mittels $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{\#}$. Es genügt also z.z., dass $A^{\#} \in \Delta$. Sei $A^{kl} \in M(n-1, \mathbb{K})$ die Matrix, die aus A durch streichen der k-ten Zeile und l-ten Spalte hervorgeht, so gilt $(A^{\#})_{lk} = (-1)^{k+l} \det(A^{kl})$. Für $k < l$ ist A^{kl} von der folgenden Gestalt:

$$A^{kl} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{k-1,k-1} \end{array} & * & * \\ \hline 0 & \begin{array}{cccc} 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,l-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{l-1,l-1} \\ 0 & \cdots & & 0 \end{array} & * \\ \hline 0 & 0 & \begin{array}{ccc} a_{l+1,l+1} & \cdots & a_{n,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} \end{array} \end{array}\right)$$

Insbesondere ist $A^{kl} \in \Delta$ und $a_{ii} = 0$ für $k \leq i \leq l$. Also ist $\det(A^{kl}) = 0$.

3.Möglichkeit: Man betrachtet das LGS $A \cdot B = \mathbb{E}_n$ mit Unbekannten b_{ij}. Wir fixieren die $j - te$ Spalte und werten die Zeilen von $A \cdot B$ von unten nach oben aus:

$$\begin{array}{lcl} (A \cdot B)_{nj} = a_{nn} b_{nj} = 0 & \underset{a_{nn} \neq 0}{\Longrightarrow} & b_{nj} = 0 \\ (A \cdot B)_{n-1,j} = a_{n-1,n-1} b_{n-1,j} + a_{n-1,n} b_{nj} = 0 & \underset{a_{n-1,n-1} \neq 0}{\Longrightarrow} & b_{n-1,j} = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (A \cdot B)_{j+1,j} = a_{j+1,j+1} b_{j+1,j} + \cdots + a_{j+1,n} b_{nj} = 0 & \underset{a_{j+1,j+1} \neq 0}{\Longrightarrow} & b_{j+1,j} = 0 \end{array}$$

Also gilt $b_{ij} = 0$ für $i > j$ und deshalb $B \in \Delta$.

c) $(\Delta \cap Gl(n,\mathbb{K}),\cdot) \subset (Gl(n,\mathbb{K}),\cdot)$ ist eine Untergruppe.

Wie im Teil a) ist z.z., dass $\Delta \cap Gl(n,\mathbb{K})$ nichtleer und abgeschlossen unter Multiplikation und Inversenbildung ist:

$\Delta \cap Gl(n,\mathbb{K}) \neq \emptyset$ da z.B. $\mathbb{E}_n \in \Delta \cap Gl(n,\mathbb{K})$. Seien nun $A, B \in \Delta \cap Gl(n,\mathbb{K})$, so gilt $A \cdot B \in \Delta$ nach Teil a) und $A^{-1} \in \Delta$ nach Teil b). Aus der Gruppeneigenschaft von $Gl(n,\mathbb{K})$ folgt ferner $A \cdot B, A^{-1} \in Gl(n,\mathbb{K})$.

Bemerkungen:

(i) Die Gruppenoperation war im Teil c) zwar nicht explizit angegeben, die Addition konnte es aber nicht sein, da die Summe zweier invertierbarer Matrizen nicht wieder invertierbar zu sein braucht - z.B. $\mathbb{E}_n + (-\mathbb{E}_n) = 0$.

(ii) Sei $(\Delta, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $\Delta^\times$ die Teilmenge der in Δ invertierbaren Elemente. Dann zeigt man wie im Teil c), dass $(\Delta,\cdot)$ eine Gruppe ist. Dieser allgemeine Fakt lässt sich hier direkt anwenden, denn nach Teil b) wissen wir bereits, dass $\Delta^\times = \Delta \cap Gl(n,\mathbb{K})$.

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem in $x \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = b \qquad (*)$$

mit $A \in M(m, n; \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m$ Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem höchstens und mindestens, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind? Geben Sie jeweils *ohne Begründung* nur die minimal und maximal mögliche *Anzahl* von Lösungen an!

(a) $(*)$ hat zwei verschiedene Lösungen.

(b) Das homogene System $Ax = 0$ besitzt genau eine Lösung.

(c) Das Gleichungssystem besitzt endlich viele Lösungen.

(d) $m > n$.

(e) Der Rang der Matrix erfüllt $rg(A) = m$.

5 P

Lösung:

	Minimale Anzahl	Maximale Anzahl
a)	∞	∞
b)	0	1
c)	0 (bzw. 1)	1
d)	0	∞
e)	1	∞

Aufgabe 5
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5 P

Lösung:

6.(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
(x^4 & + & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 5x & + & 2) & : (x^2 + x + 1) = x^2 + 3x + 2 \text{ (ohne Rest)} \\
-(x^4 & + & x^3 & + & x^2) & & & & & \\
 & & 3x^3 & + & 5x^2 & + & 5x & + & 2 & \\
 & & -(3x^3 & + & 3x^2 & + & 3x & & & \\
 & & & & -(2x^2 & + & 2x & + & 2) & \\
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Also: $p(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 2)$.

(b) Aufgrund der obigen Zerlegung von p wissen wir: Wenn x Nullstelle von p ist, ist entweder $x^2 + x + 1 = 0$ oder $x^2 + 3x + 2 = 0$ (Nullteilerfreiheit von $\mathbb{C}$). Die Nullstellen dieser beiden quadratischen Polynome kann man mit quadratischer Ergnzung lsen:

$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$

als Nullstellen des ersten Polynoms; beim zweiten Polynom kann man wegen der Positivitt der Diskriminante direkt die pq-Formel fr *reelle* Nullstellen anwenden und erhlt

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{3}{2} = -1, -2.$

Aufgabe 6

(a) Dividieren Sie das Polynom $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ durch $q(x) = x^2 + x + 1$ mit Rest.
(b) Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms p.

5 P

Insgesamt: **30 P**