Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Musterlösungen zur Klausur

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Winter 2003/2004

14.02.2004

Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt. Für die Aufgabe 5 müssen Sie das Aufgabenblatt verwenden. Beschriften Sie jedes dieser Blätter mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer. Heften Sie das Deckblatt, das Aufgabenblatt und die Blätter mit Ihren Lösungen am Ende zusammen. Bitte schreiben Sie so, dass wir es lesen können. Ergebnisse ohne erkennbare Lösungswege können leider nicht gewertet werden (mit Ausnahme der Aufgabe 5).

Aufgabe 1
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 10 & 21 \\ -1 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

5 P

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 10 & 21 \\ -1 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}^{(2\cdot II+I)} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 12 & 24 & 39 \\ -1 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 12 & 24 & 39 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} II - I \\ III - I \end{pmatrix}$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot (8-6) = 14.$$

Aufgabe 2
Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_4, x_2 + x_4, x_1 + x_2 + 2x_4).$$

(a) Ist φ injektiv bzw. surjektiv?

(b) Geben Sie $Ker(\varphi)$ an! Bestimmen Sie eine Basis vom Bild $Im(\varphi)$

(c) Bestimmen Sie die zu φ gehörende Matrixdarstellung bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^4$ bzw.

$$\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

des $\mathbb{R}^3$

7 P

Lösung:

(a) Die Abbildung φ ist *nicht injektiv*, z.B. gilt $\varphi(0,0,a,0) = \varphi(0,0,b,0)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, also auch für $a \neq b$. Allgemeiner folgt aus der Dimensionsfomel für eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\dim ker(\varphi) = n - \dim im(\varphi) \geq n - m \tag{1}$$

Ist also $n > m$ wie im vorliegenden Fall, ist $ker(\varphi) \neq \{0\}$, d.h. φ nicht injektiv.

Die Abbildung φ ist *nicht surjektiv*, denn für die Komponenten des Bildes

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) &= \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (x_1 + x_4, x_2 + x_4, x_1 + x_2 + 2x_4) \end{aligned}$$

gilt die Relation $y_2 + y_1 = y_3$. Also liegt z.B. $(0,0,1)$ nicht im Bild von φ. Alternativ kann man auch $ker(\varphi)$ berechnen. Man erhält $\dim ker(\varphi) = 2$ (siehe (b)) und mit (1) schliesst man $\dim im(\varphi) = n - \dim ker(\varphi) = 2$. Also ist das Bild 2-dimensional und damit ungleich $\mathbb{R}^3$.

(b) Bezüglich der Standardbasen $S_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ im $\mathbb{R}^n$ hat φ folgende Matrixdarstellung:

$$M_{S_3}^{S_4}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da der Kern invariant ist unter elementaren Zeilenoperationen, gilt:

$$ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die ersten beiden Spalten von $M_{S_3}^{S_4}(\varphi)$ sind Pivotspalten, also gilt:

$$im \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) *Variante I:* Seien $B_1 = \{b_1^1, \ldots, b_n^1\}$ und $B_2 = \{b_1^2, \ldots, b_m^2\}$ Basen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Zur Berechnung von $M_{B_2}^{B_1}(\varphi)$ dient das folgende Verfahren:

$$\left(b_1^2, \ldots, b_m^2 \;\middle|\; \varphi(b_1^1), \ldots \varphi(b_n^1)\right) \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\mathbb{E}_m \;\middle|\; M_{B_2}^{B_1}(\varphi)\right)$$

Hier ergab sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Variante II: Man berechnet die Basisübergangsmatrizen:

$$T_{S_4}^{B_1} = \left(b_1^1, \ldots, b_4^1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$T_{B_2}^{S_3} = \left(T_{S_3}^{B_2}\right)^{-1} = \left(b_1^2, \ldots, b_3^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Matrixdarstellung ergibt sich jetzt aus der Transformationsformel

$$\begin{aligned} M_{B_2}^{B_1}(\varphi) &= T_{B_2}^{S_3} \cdot M_{S_3}^{S_4}(\varphi) \cdot T_{S_4}^{B_1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei der 2. Variante gibt es deutlich mehr Möglichkeit sich irgendwo zu verrechnen...

Aufgabe 3

Im Vektorraum der quadratischen Polynome mit reellen Koeffizienten seien die Familien

$$\mathcal{B}_1 = (x+1, x^2+1, x^2+x) \tag{2}$$

$$\mathcal{B}_2 = (3x+3, 2x^2+x+1, 2x^2+x-1) \tag{3}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen sind.

(ii) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des Polynoms $-4x^2+4x+10$ bezüglich jeder dieser beiden Basen.

5 P

Lösung: Wir berechnen zunächst die Koordinaten von $-4x^2+4x+10$ bezüglich der vermeintlichen Basen. Ist andererseits die Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems eindeutig, so müssen $\mathcal{B}_\infty$ und $\mathcal{B}_2$ linear unabhängig sein. Da der Raum der quadratischen Polynome 3–dimensional ist, und beide Familien aus drei Vektoren bestehen, folgt daraus dann, dass beides basen sind.

$\mathcal{B}_1$:

$$a(x+1) + b(x^2+1) + c(x^2+x) = -4x^2+4x-1.$$

Durch Koefizientenvergleich ergibt sich ein lineares Gleichungssystem (und deren erweiterte Koeffizientenmatrix) und mit Gaußalgorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Somit ist also

$$-4x^2 + 4x - 1 = \frac{7}{2}(x+1) - \frac{9}{2}(x^2+1) + \frac{1}{2}(x^2+x).$$

$\mathcal{B}_2$:

$$a(3x+3) + b(2x^2+x+1) + c(2x^2+x-1) = -4x^2+4x-1.$$

Durch Koefizientenvergleich ergibt sich ein lineares Gleichungssystem (und deren erweiterte Koeffizientenmatrix) und mit Gaußalgorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right).$$

Somit ist also

$$-4x^2 + 4x - 1 = 2(3x+3) - \frac{9}{2}(2x^2+x+1) + \frac{5}{2}(2x^2+x-1).$$

Die Lösungen sind eindeutig und damit sind die Koeffizienten der Linearkombinationen auch eindeutig bestimmt. Man sieht auch, dass man auf diese Weise jedes quadratische Polynom als Linearkombination aus den Elementen von $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bestimmen kann, d.h. beide Familien spannen jeweils den ganzen Raum der quadratischen Polynome auf. Somit kann man auch ohne auf die Dimesnion zu verweisen schließen, dass sowohl $|calB_1$ als auch $\mathcal{B}_2$ Basen sind.

Aufgabe 4
Sei $N \in M(n;\mathbb{K})$ eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft $N^m \neq 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, während $N^{m+1} = 0$ ist. Zeigen Sie, dass die Matrizen $\mathbb{E}_n, N, N^2, ..., N^m$ linear unabhängig im Vektorraum der Matrizen $M(n,\mathbb{K})$ sind.

3 P

Lösung: Angenommen $\lambda_0 E_n + \lambda_1 N + \cdots + \lambda_m N^m = 0$ für $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ in $\mathbb{R}$. Nach Komposition mit N^m, bekommen wir dass $\lambda_0 N^m = 0$. Aber $N^m \neq 0$, somit ist $\lambda_0 = 0$. Wir wiederholen diesen Prozess mit N^{m-1}, und bekommen, dass $\lambda_1 = 0$ usw.

Aufgabe 5
Kreuzen Sie die zutreffenden Antworten an. Es sind mehrere Antworten möglich. Ein falsch gesetztes Kreuz wirkt sich mit $0,5$ Punkten negativ auf die Wertung dieser Aufgabe aus. Es gibt jedoch nicht weniger als 0 Punkte.

a) Welche der folgenden Bedingungen ist eine korrekte Definition für die Aussage: "Der Vektorraum V wird von den Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ erzeugt"?

◯ Jede Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ gehört zu V.
◯ Jedes Element von V ist Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.
◯ dim V=n.

b) Welche der Aussagen ist gleichbedeutend mit "linearer Unabhängigkeit des n-Tupels $(v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren aus V" ?

◯ $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ nur wenn $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
◯ Wenn $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, so $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.
◯ $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ für alle $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

c) $V \xrightarrow{L_1} W \xrightarrow{L_2} V$ seien lineare Abbildungen mit $L_2 \circ L_1 = Id_V$. Welche Aussagen sind dann richtig?

◯ $\dim W \geq \dim V$, L_1 injektiv, L_2 surjektiv
◯ $\dim W \leq \dim V$, L_2 injektiv, L_1 surjektiv
◯ $\dim W = \dim V$, L_1 bijektiv

d) Sei K ein Körper mit 4 Elementen, $f : K^2 \to K^2$ eine lineare Abbildung. Aus wie vielen Elementen kann $ker f$ bestehen?

◯ 1 Element
◯ 2 Elemente
◯ 4 Elemente
◯ 8 Elemente
◯ 16 Elemente

e) $\varphi : V \to W$ sei eine lineare Abbildung zwischen endlich–dimensionalen Vektorräumen. Aus welcher der folgenden Aussagen folgt die Injektivität von φ?

◯ $Ker\varphi = \{0\}$
◯ $\dim V = \dim Im(\varphi)$
◯ $\dim V \leq \dim W$
◯ $\varphi(V) = W$
◯ $\dim V = \dim W$ und $\varphi(V) = W$

5 P

Lösung:
5a) Richtig: 2 (s. VL)

5b) Richtig: 1 - (s. VL)

5c) Richtig: 1 - s. UE: wenn $L_2 \circ L_1$ injektiv, dann L_1 injektiv, wenn $L_2 \circ L_1$ surjektiv, dann L_2 surjektiv. Id ist sowohl injektiv als auch surjektiv. Gegenbeispiel zu 2 und 3: V Nullraum, W nicht der Nullraum, dann gilt die Voraussetzung, aber nicht 2 oder 3.

5d) Richtig: 1,3,5 - Abbildung kann injektiv sein, einen eindimensionalen Kern haben oder die Nullabbildung sein; dementsprechend ist der Kern ein 0-, 1- oder 2-dimensionaler K-Vektorraum sein, hat also 4^0, 4^1 oder 4^2 viele Elemente.

5e) Richtig: 1,2,5 - s.VL, Kriterien Injektivität und Dimensionsgleichung.

Aufgabe 6
(a) Sei $P \in M(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix mit $P^2 = P$ (eine *Projektion*). Zeigen Sie, dass $\det P \in \{0;1\}$. Bestimmen Sie alle Projektionen P, mit $\det P = 1$.
(b) Sei $I \in M(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix mit $I^2 = \mathbb{E}_n$ (eine *Involution*). Zeigen Sie, dass $\det I \in \{-1;+1\}$. Zeigen Sie weiterhin, dass $P_+ := \frac{1}{2}(\mathbb{E}_n - I)$ und $P_- := \frac{1}{2}(\mathbb{E}_n + I)$ Projektionen sind.
(c) Sei $J \in M(n;\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix mit $J^2 = -\mathbb{E}_n$ (eine *komplexe Struktur*). Zeigen Sie, dass n notwendig gerade ist, und dass weiterhin $\det J = 1$.

5 P

(a) Wegen $P^2 = P$ gilt

$$0 = \det(P^2) - \det P = (\det P)^2 - \det P = (\det P - 1)\det P.$$

Also folgt $\det P \in \{0;1\}$. Sei nun $\det P = 1$. Dann muss P invertierbar sein. Es folgt:

$$P = \mathbb{E}P = (P^{-1}P)P = P^{-1}P^2 = P^{-1}P = \mathbb{E}.$$

Typische Fehler: Es wurde vorausgesetzt (oder "errechnet"), dass P von spezieller Form ist (z.B. diagonal). Das ist richtig nach geeigneter Transformation $P \mapsto SPS^{-1}$, aber nur dann, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

2 Punkte

(b) Wegen $I^2 = \mathbb{E}$ folgt

$$0 = \det(I^2) - \det\mathbb{E} = (\det I)^2 - 1 = (\det I - 1)(\det I + 1).$$

Also muss $\det I \in \{-1;+1\}$ sein. Für die Abbildungen $P_\pm$ rechnet man leicht nach, dass

$$P_\pm^2 = \left(\frac{1}{2}(\mathbb{E} \mp I)\right)^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{E}^2 \mp 2\mathbb{E}I + I^2) = \frac{1}{4}(\mathbb{E} \mp 2I + \mathbb{E}) = \frac{1}{2}(\mathbb{E} \mp I) = P_\pm.$$

Demzufolge sind beide Abbildungen P_pm Projektionen. **2 Punkte**

Typische Fehler: Es wurde wieder vorausgesetzt, dass I spezielle Gestalt hat.

(3) Wegen $J^2 = -\mathbb{E}$ bekommt man, dass

$$0 = \det(J^2) - \det(-\mathbb{E}_n) = (\det J)^2 - (-1)^n = (\det J)^2 + (-1)^{n+1}.$$

Für n ungerade ist $(-1)^{n+1} = 1 > 0$ und die Gleichung ist nicht erfüllbar. Für n gerade hingegen ergibt sich

$$(detJ)^2 = 1$$

mit den möglichen Lösungen $\det J \in \{-1;+1\}$. **1 Punkt**

Typische Fehler: Wieder wurde von einer speziellen Form der Matrix J ausgegangen. Es wurde dann gefolgert, dass Diagonalgestalt erzwingt, dass auf der Diagonalen nur $\pm i$ stehen kann und nicht gesehen, dass dies dann keine reelle Matrix mehr ist.

Bemerkung: Hierfür gab es bereits den Punkt. Tatsächlich kann man $\det J = -1$ ausschließen. Das folgende elegante Argument stammt von Olaf Teschke:

Das charakteristische Polynom von J hat die Form

$$\chi_J(t) = (-t)^{2k} + ... + \det J.$$

Wäre nun $\det J = -1$ so wäre einerseits $\chi_J(0) = -1 < 0$ und andererseits $\lim_{t\to\pm\infty} \chi_J(t) = +\infty$ Nach dem Zwischenwetsatz muss $\chi_J(t)$ demnach reelle Nullstellen besitzen, und J reelle Eigenwerte. Letzteres kann man aber leicht ausschließen: Sei

$$Jv = \lambda v$$

für ein $v \in \mathbb{R}^{2k}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann wäre $-v = J^2 v = \lambda^2 v$, und somit $\lambda^2 = -1$. das ist aber (immer noch) für reelle λ unerfüllbar.

Insgesamt: **30 P**