

# Übungsblatt 1

## Lineare Algebra und analytische Geometrie II

### Sommer 2004

Abgabe 26.04.2004

---

#### Aufgabe 1

- Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $A \in \text{End}(V)$  eine lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom  $\chi_A(t) = t(t-1)^5(t+2)^2$  und Minimalpolynom  $m_A(t) = t(t-1)^2(t+2)$ . Welche Jordanschen Normalformen kommen für  $A$  in Frage?
- Finden Sie Matrizen  $A, B \in M(3, \mathbb{R})$  deren Minimalpolynome übereinstimmen, die aber nicht zueinander ähnlich sind, d.h. es existiert kein  $T \in \text{Gl}(3, \mathbb{R})$  mit  $A = T^{-1}BT$ . Können dann auch die charakteristischen Polynome gleich sein?
- Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung  $A \in \text{End}(V)$  ist diagonalisierbar genau dann wenn ihr Minimalpolynom von der Gestalt  $m_A(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)$  ist, wobei  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ .

#### Aufgabe 2

Betrachten Sie folgende lineare Abbildung  $A \in \text{End}(\mathbb{R}^6)$  die bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^k p_i(t)^{s_i}$  von  $A$ , wobei  $p_i(t) \in \mathbb{R}[t]$  irreduzible, paarweise teilerfremde Polynome sind.
- Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es eine Zerlegung  $\mathbb{R}^6 = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  in  $A$ -invariante Unterräume  $V_i$  gibt, so dass  $\chi_{A|_{V_i}} = p_i(t)^{s_i}$ . Bestimmen Sie die Räume  $V_i$  durch Angabe von Basen  $\mathcal{B}_i$  und berechnen Sie die Matrixdarstellung von  $A$  in der Basis  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ .
- Bestimmen Sie das Minimalpolynom  $m_A(t)$ .

#### Aufgabe 3

Die folgende Matrix ist nilpotent:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie  $T \in \text{Gl}(6, \mathbb{R})$ , so dass  $T^{-1} \cdot A \cdot T$  eine Matrix in Jordanscher Normalform ist.