Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 26.04.2004

Aufgabe 1

a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in End(V)$ eine lineare Abbildung mit charakteristischen Polynom $\chi_A(t) = t(t-1)^5(t+2)^2$ und Minimalpolynom $m_A(t) = t(t-1)^2(t+2)$. Welche Jordanschen Normalformen kommen für A in Frage?

b) Finden Sie Matrizen $A, B \in M(3, \mathbb{R})$ deren Minimalpolynome übereinstimmen, die aber nicht zueinander ähnlich sind, d.h. es existiert kein $T \in Gl(3, \mathbb{R})$ mit $A = T^{-1}BT$. Können dann auch die charakteristischen Polynome gleich sein?

c) Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $A \in End(V)$ ist diagonalisierbar genau dann wenn ihr Minimalpolynom von der Gestalt $m_A(t) = \prod_{i=1}^{k}(t - \lambda_i)$ ist, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

Aufgabe 2
Betrachten Sie folgende lineare Abbildung $A \in End(\mathbb{R}^6)$ die bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{k} p_i(t)^{s_i}$ von A, wobei $p_i(t) \in \mathbb{R}[t]$ irreduzible, paarweise teilerfremde Polynome sind.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es eine Zerlegung $\mathbb{R}^6 = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ in A-invariante Unterräume V_i gibt, so dass $\chi_{A|_{V_i}} = p_i(t)^{s_i}$. Bestimmen Sie die Räume V_i durch Angabe von Basen $\mathcal{B}_i$ und berechnen Sie die Matrixdarstellung von A in der Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$

c) Bestimmen Sie dass Minimalpolynom $m_A(t)$.

Aufgabe 3
Die folgende Matrix ist nilpotent:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $T \in Gl(6, \mathbb{R})$, so dass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist.

Die Lösungen sind in der Montags-Vorlesung abzugeben. Bitte schreiben Sie auch die von Ihnen besuchte Übung mit auf das Blatt - dort erhalten Sie dann die korrigierten Lösungen zurück. Die Aufgaben finden Sie auf folgender Internetseite: **http://www.mathematik.hu-berlin.de/~mohnke**