Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 03.05.2004

Aufgabe 1
Sei $\varphi \in Gl(V)$ eine invertierbare lineare Abbildung eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass dann ein Polynom $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ existiert mit $p(\varphi) = \varphi^{-1}$ (Hinweis: Satz von Cayley-Hamilton).

Aufgabe 2
Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass dann eine Matrix $T \in Gl(n, \mathbb{C})$ existiert mit $A^t = T^{-1}AT$. A^t bezeichne die zu A transponierte Matrix.

Aufgabe 3
Sei $A \in Gl(n, \mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix mit Jordanscher Normalform

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J(\lambda_1, n_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & J(\lambda_2, n_2) & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & J(\lambda_k, n_k) \end{array}\right) \quad \text{wobei} \quad J(\lambda_i, n_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M(n_i, \mathbb{C})$$

Zeigen Sie , dass dann die Jordansche Normalform von A^{-1} die Jordankästchen $J(\frac{1}{\lambda_i}, n_i)$ hat.

Zusatzaufgabe
Sei $\varphi \in End(V)$ ein Endomorphismus des $\mathbb{K}$–Vektorraumes V. Wir setzen voraus, dass das Polynom vom Grad $d > 0$, $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, irreduzibel (oder auch:prim) ist, d.h. aus $p(t) = h(t)k(t)$ für Polynome $h(t), k(t) \in \mathbb{K}[t]$ folgt entweder $h(t) = cp(t)$ oder $k(t) = cp(t)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Es gelte $p(\varphi) = 0 \in End(V)$.
(1) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ die Familie $\{v; \varphi(v); \varphi^2(v); ...; \varphi^{d-1}(v)\}$ linear unabhängig ist.
(2) Sei $U \subset V$ ein φ–invarianter Unterraum, $w \notin U$. Zeigen Sie, dass dann $W \cap U = \{0\}$ für $W := span\{w; \varphi(w); \varphi^2(w); ...; \varphi^{d-1}(w)\}$.