Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 10.05.2004

Aufgabe 1

a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen sie eine Matrix $P \in Gl(3, \mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ die reelle Jordansche Normalform von A realisiert.

b) Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit der Eigenschaft $A^t = -A$. Zeige, dass dann das charakteristische Polynom von der Form $\chi_A(t) = \pm\, t^{n-2k} \cdot (t^2 + {\lambda_1}^2) \cdot \ldots \cdot (t^2 + {\lambda_k}^2)$ ist und dass die reelle Jordansche Normalform von A die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & \lambda_k & & & \\ & & & -\lambda_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bestimme die zu $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ duale Basis $\mathcal{B}^*$ des $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) Sei $\varphi = (1, -2, 2) \in (\mathbb{R}^3)^*$. Bestimme die Koordinaten von φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}^*$.

c) Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ mit Transformationsmatrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$. Berechne die Transformationsmatrix $T^{\mathcal{B}^*}_{(\mathcal{B}')^*}$ zwischen den dualen Basen.

Aufgabe 3

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum. Der *Annihilator* $U^\perp$ *von* U ist definiert als:

$$U^\perp := \{v^* \in V^* \mid v^*(u) = 0 \;\forall u \in U\}$$

Beweise folgende Aussagen:

a) $U^\perp \subset V^*$ ist ein Untervektorraum und $\{0\}^\perp = V$, $V^\perp = \{0\}$.

b) Für Untervektorräume $U_1, U_2 \subset V$ gilt:

$$(U_1 + U_2)^\perp = {U_1}^\perp \cap {U_2}^\perp, \qquad (U_1 \cap U_2)^\perp = {U_1}^\perp + {U_2}^\perp$$

c) $dim(U^\perp) = dim(V) - dim(U)$.

d) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt:

$$im(\varphi)^\perp = \ker(\varphi^*), \qquad \ker(\varphi)^\perp = im(\varphi^*)$$

Zusatzaufgabe (Jordan-Chevalley-Zerlegung)
Sei $\varphi \in End(V)$ ein Endomorphismus eines komplexen Vektorraumes V. Zeige, dass es eine eindeutige Zerlegung $\varphi = S_\varphi + N_\varphi$ in Endomorphismen $S_\varphi, N_\varphi \in End(V)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $S_\varphi \circ N_\varphi = N_\varphi \circ S_\varphi$.

(ii) S_φ ist diagonalisierbar.

(iii) N_φ ist nilpotent.

Ferner beweise man, dass es ein Polynom $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ gibt, so dass $S_\varphi = p(\varphi)$.