Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 17.05.2004

Aufgabe 1

a) Betrachte auf $\mathbb{R}^3$ die Bilinearform $f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 2x_3y_3$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^t$, $y = (y_1, y_2, y_3)^t$. Bestimme die Gramsche Matrix $G_S(f)$ bezüglich der Standardbasis $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$.

b) Man untersuche, ob die folgenden Bilinearformen des $\mathbb{R}^3$ ausgeartet sind:

$$G_S(f) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_S(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

c) Sei $G_S(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimme und skizziere alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,x) = 0$ bzw. mit $f(x,x) = 1$.

Aufgabe 2

a) Es sei f eine eine Bilinearform auf V. Zeige, dass $f(v,0) = f(0,v) = 0$, $\forall v \in V$.

b) Es seien f und g zwei symmetrische Bilinearformen eines reellen Vektorraums V mit der Eigenschaft $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = 0 \; \forall x, y \in V$. Man beweise, dass dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $f = \lambda \cdot g$ (Hinweis: Man betrachte die zugehörigen Gramschen Matrizen bezüglich *einer* Basis und vergleiche erst die Zeilen und dann die Spalten).

Aufgabe 3
Sei $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bilinearform aus Aufgabe 1a).

a) Konstruiere eine Orthogonalbasis B bezüglich f, d.h. eine Basis $\{v_i\}_{i=1}^n$, so dass $f(v_i, v_j) = 0$ falls $i \neq j$. Berechne für B die zugehörige Gramsche Matrix.

b) Sei $W = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Bestimme eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,w) = 0 \, \forall w \in W\}$.

c) Bestimme die Orthogonalprojektionen $p_W(e_1)$ und $p_{W^\perp}(e_1)$ von $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. die eindeutige Zerlegung $e_1 = p_W(e_1) + p_{W^\perp}(e_1)$ mit $p_W(e_1) \in W$ und $p_{W^\perp}(e_1) \in W^\perp$.

Zusatzaufgabe
Sei $\Omega \subset V$ eine nichtleere konvexe Teilmenge eines Vektorraums, d.h. wenn $v, w \in \Omega$ dann gilt $sv + (1-s)w \in \Omega \, \forall s \in [0,1]$. Das Dual $\Omega^* \subset V^*$ sei dann definiert durch

$$\Omega^* = \{\alpha \in V^* | \alpha(v) \leq 1 \forall v \in \Omega\}$$

a) Zeige, dass Ω^* wieder konvex ist.

b) Beschreibe Ω^* für den Fall, dass $\Omega \subset V$ ein Untervektorraum ist sowie für den Würfel $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| \leq 1\}$.