Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 24.05.2004

Aufgabe 1

a) Zeige, dass durch $< A, B >= tr(A^T \cdot B)$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $M(n, \mathbb{R})$ der reellen $n \times n$- Matrizen definiert wird. Dabei ist $tr(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ die Spur der Matrix C.

b) Zeige, dass $< x, y >= x^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R}^3)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

c) Zeige, dass $< x, y >= x^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R}^2)$ kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Aufgabe 2 (Kriterium von Hurwitz)
Sei $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Definiere

$$D_k = \det \begin{pmatrix} f(b_1, b_1) & \ldots & f(b_1, b_k) \\ \vdots & & \vdots \\ f(b_k, b_1) & \ldots & f(b_k, b_k) \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass $D_k \neq 0$ genau dann, wenn f nicht ausgeartet ist auf $W_k := span\{b_1, \ldots, b_k\}$.

b) Sei nun $D_k \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots n$. Zeige, dass durch die rekursive Vorschrift

$$c_1 = b_1, \quad c_k := b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f(c_i, b_k)}{f(c_i, c_i)} c_i$$

eine Orthogonalbasis $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ von V gegeben ist, d.h. $f(c_i, c_j) = 0$ falls $i \neq j$ sowie $f(c_i, c_i) \neq 0$ für alle i.

(Hinweis: Induktion über k bietet sich hier an. Zeigen Sie, dass $\{c_1, ..., c_k\}$ eine Orthogonalbasis von f eingeschränkt auf W_k ist. Für $f(c_k, c_k) \neq 0$ benötigen Sie die Voraussetzung.)

c) Zeige, dass die Übergansmatrix T_C^B von der Gestalt $T_C^B = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ ist.

d) Zeige, dass $D_k = \prod_{i=1}^k f(c_i, c_i)$, also $f(c_k, c_k) = \frac{D_k}{D_{k-1}}$ mit $D_0 = 1$.

e) Zeige: f ist positiv definit genau dann, wenn $D_i > 0$ für alle i.

Hinweis: Sie dürfen für jeden Schritt alle Behauptungen der vorherigen Schritte verwenden, auch wenn Sie diese nicht ausführen konnten.

Aufgabe 3

a) Betrachte auf $\mathbb{R}^3$ das Skalarprodukt aus Aufgabe 1b). Wende das Gram-Schmidt Verfahren an, um aus der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis zu gewinnen.

b) Betrachte den Vektorraum Pol_2 der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 2 versehen mit dem Skalarprodukt

$$< p, q >:= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx \qquad (*)$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren an, um aus der Standardbasis $S = \{1, x, x^2\}$ von Pol_2 eine Orthonormalbasis zu gewinnen. (Hinweis: Verwenden Sie dabei nicht die Formel aus der Zusatzaufgabe!).

Zusatzaufgabe (Legendre-Polynome)
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten versehen mit den Skalarprodukt $(*)$ aus Aufgabe 3. Die Legendre-Polynome $p_n(x)$ sind definiert durch

$$p_0(x) = 1, \quad p_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n,\ n \in \mathbb{N}$$

Zeige, dass die Legendre-Polynome entstehen, indem man auf die Standardbasis $\{1, x, x^2, \ldots\}$ von $\mathbb{R}[x]$ das Gram-Schmidt Verfahren anwendet, wobei die Vektoren durch die Forderung $p_n(1) = 1$ normiert sind (sie bilden keine Ortho*normal*basis!).