Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 02.06.2004

Aufgabe 1 (Ausgleichsrechnung)
Sei $V = Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der Abbildungen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Betrachte auf V die Bilinearform

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot g(t_i)$$

Ferner bezeichne $\mathrm{Pol}_s \subset \mathbb{R}[x] \subset V$ den Untervektorraum der Polynome vom Grad $\leq s$.

a) Zeige, dass $< \cdot, \cdot >$ nicht ausgeartet ist auf Pol_s für $s \leq n - 1$.

b) Bestimme Formeln für die Orthogonalprojektion auf Pol_s für $s = 1$ und $s = 2$ und interpretiere diese mithilfe des "Abstandes" eines Vektors v vom Unterraum $\mathrm{Pol}_s \subset V$.

c) Man berechne die ausgleichende Gerade $pr_{\mathrm{Pol}_1}(f(x))$ und die ausgleichende Parabel $pr_{\mathrm{Pol}_2}(f(x))$, wobei

t_i	-2	-1	0	1	2
$f(t_i)$	8	-1	2	8	20

Aufgabe 2
Beschreibe geometrisch die folgenden Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, die durch $\varphi(x) = Ax$ gegeben werden, mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 3/7 & -6/7 & 2/7 \\ 6/7 & 2/7 & -3/7 \end{pmatrix}$$

Gib die konkreten Daten an: Drehachse, Spiegelungsgerade, oder -ebene, Drehwinkel, und -richtung.

Aufgabe 3
Sei A_φ die Familie der Drehungen um den Winkel φ des $\mathbb{R}^3$ mit der orientierten Drehachse die durch $(1,1,1)^T$ erzeugt wird.

a) Berechne die Familie $w(\varphi) = A_\varphi w$ für $w = (1,-1,0)^T$ und deren Ableitung $\dot{w}$ nach φ in $\varphi = 0$.

b) Berechne das Vektorprodukt $v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)$ und vergleiche es mit $\dot{w}$.

c) Zeige eine entsprechende allgemeine Beziehung zwischen $\dot{w}$ und $v \times w$ für beliebiges $v \neq 0$ und w. Zeige dafür zunächst für jede *orientierte* Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, dass $u_1 \times u_2 = u_3$.

Zusatzaufgabe
Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\Omega \in End(V)$ *schiefsymmetrisch*,
d.h. $\Omega^* = -\Omega$. Man zeige:

a) $id_V + \Omega : V \to V$ ist bijektiv.

b) $Q := (id_V - \Omega)(id_V + \Omega)^{-1}$ ist eine orthogonale Abbildung, ohne Eigenwert -1.

c) Jede orthogonale Abbildung $Q \in O(V)$, für die -1 nicht Eigenwert ist, lässt sich so darstellen (Hinweis: Man stelle die Gleichung formal um, und beweise die so erhaltene Formel).