Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2004

Abgabe 07.06.2004

Aufgabe 1
Sei V ein endlich–dimensionaler euklidischer Raum. Eine Spiegelung von V ist eine orthogonale Abbildung $\sigma : V \to V$, so dass $\sigma \neq id_V$ und $\sigma(u) = u$ für alle $u \in U$ eines Unterraumes mit $\dim U = \dim V - 1$. Man sagt auch σ ist die Spiegelung an U.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von σ und die Determinante $\det(\sigma)$. Ist σ diagonalisierbar?

b) Zeigen Sie $\sigma^2 = id_V$ für jede Spiegelung σ.

c) Für jedes $e \in V$ mit $|e| = 1$ ist die Abbildung $\sigma_e : v \in V \mapsto v - 2\langle v, e\rangle e$ eine Spiegelung.

d) Zu jeder Spiegelung σ von V gibt es ein $e \in V$ mit $|e| = 1$, so dass $\sigma = \sigma_e$.

e) Seien $e, f \in V$ mit $|e| = |f| = 1$. Beschreiben Sie geometrisch die Verknüpfung $\sigma_e \circ \sigma_f$.

f) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Abbildung von V das Produkt von Spiegelungen von V ist.

Aufgabe 2

a) Bestimmen und skizzieren Sie diejenigen Parameter $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ für die die Teilmenge der Ebene $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a{x_1}^2 + 2x_1x_2 + b{x_2}^2 = 1\}$ eine Ellipse bzw. eine Hyperbel ist

b) Man berechne die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und bestimme ein $T \in SO(3)$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3
Sei $U \subset V$ ein Unterraum eines euklidischen Vektorraumes. Die lineare Abbildung $pr_U^\perp : V \to V$ gegeben durch

$$pr_U^\perp(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \in U^\perp \end{cases}$$

heisst *orthogonale Projektion auf* U.

a) Beweisen Sie: eine lineare Abbildung $P : V \to V$ ist eine orthogonale Projektion genau dann wenn $P^2 = P$ und $P^* = P$.

b) Sei $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: die durch die Matrix $(\delta_{ij} - x_ix_j)$ gegebene Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ ist eine orthogonale Projektion genau dann wenn $|x| = 1$.

c) Berechnen Sie die Determinante $\det(\delta_{ij} + x_ix_j)$ für beliebiges $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Zusatzaufgabe
Seien $v_1, ..., v_n, w$ Vektoren im euklidischen Raum V, so dass

a) $\langle v_j, w\rangle > 0$ für $j = 1, ..., n$ und

b) $\langle v_i, v_j\rangle \leq 0$ für alle $i \neq j$.

Geometrisch bedeutet dies, dass alle v_i auf einer Seite der Hyperebene $w^{\perp}$ liegen und paarweise stumpfe Winkel bilden. Zeige, dass $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig sind.